



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Snakk om problemløsningsstrategier!

Anne-Gunn Svorkmo
Novemberkonferansen 2017



Problemløsing har en fremtredende rolle i LK06

- Matematisk kompetanse inneber å bruke **problemløysing** og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er. Dette har òg **språklege aspekt**, som det å formidle, **samtale om og resonnerer omkring idear**.
- Opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og **problemløysande aktivitetar** og ferdigheitstrening» (KD 2006).

Inspirasjon fra Rika matematiske problem

(Hagland, Hedrén & Taflin, 2005):

- Med problem menas en oppgitt som en person vill eller behøver løse, der personen ifråga inte har en på förhand given procedur för att lösa problemet och där det krävs en ansträngning av henne eller honom för att lösa problemet

Kriterier for en rik oppgave

(i følge Hagland, Hedrén og Taflin)

Problemet skal:

- introducera viktiga matematiska idéer eller vissa Lösningstrategier.
- vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
- upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.

forts. kriterier

- kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
- kunna initiera en matematisk diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.
- kunna fungera som en brobyggare mellan olika matematiska områden.
- kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

i tillegg...

- For å kunne løse et problem, må problemløseren sette sammen og bruke tidligere kunnskap han innehar på en ny måte.
- Et problem for en person kan være en rutineoppgave for en annen.

En oppgave med muligheter!

En oppgave som kan løses på mer enn en måte!

Oppgaven kan ha mer enn ett svar! Løsningen på oppgaven kan være noe annet enn svaret!

Lav inngangsterskel!

Hva om... Enn hvis...!

Hvor finner man gode
problemløsningsoppgaver?

OVER ALT!

Her er oppgavene hentet fra
Kengurukonkurransen



Problemløsning steg for steg

George Polya, 1971



- Forstå problemet
- Legge en plan
- Gjennomføre planen
- Se seg tilbake

Strategier som verktøy

En løsningsstrategi beskrives som en bevisst kontroll av de mentale prosessene og den rekken av matematiske operasjoner som blir utført ved oppgaveløsning.

(Björkqvist, 2003)

Vi legger planer og gjennomfører deler av planen!

I – G – P

- Hvordan vil du angripe på oppgaven?
- Beskriv strategien din for gruppa. Sammenlign strategiene på gruppa.
- En eller flere strategier som skiller seg ut? Hvorfor?
- Hva er det med oppgaven som gjør at denne/disse strategiene egner seg å bruke?
- Hvilken/e strategier ser dere for dere at elever kan komme til å bruke?
- Plenum

I: Individuelt 3-4 min.

G: 4-er gruppe ved at to snur seg til bordet bak.

P: Vi diskuterer oppgaven og strategien/e. Kommentarer til strategien/e.

Oppgave 1 (C21-2017)

Tallene i tallfølgen 2, 3, 6, 8, 8,... får vi på følgende måte:
De to første tallene er 2 og 3. Deretter får vi neste tall ved å ta siste siffer i produktet av de to foregående tallene.

Hvilket tall står som nummer 2017 i tallfølgen?

C betyr at denne oppgaven er hentet fra oppgavesettet Cadet og at dette er oppgave nr. 21 i fra Kengurukonkurransen i 2017.

Mest kjente strategier(?)

(Kubat, 2014, Svingen m.fl., 2015, Torkildsen, 2017).

- Lag en modell (tegning, figur bruk av konkrete)
- Prøv og feil (gjett og sjekk)
- Let etter mønster
- Arbeid baklengs
- Løs et enklere problem/del opp problemet
- Lag en tabell eller diagram
- Undersøk systematisk (en organisert liste)

Strategien *let etter mønster*

- Å oppdage et mønster i en problemløsningsoppgave enten i form av fellestrekk, forskjeller eller variasjoner, kan føre til at det blir enklere å løse problemet. (Kongelf, 2011).
- Mønstrene kan være geometriske, numeriske eller algebraiske (Polya, 1981).
- Liste/oversikt kan gjøre det enklere å se mønster.

«Vanligste» strategier brukt i lærebøker for grunnskolen:

(Kongelf, T. R., 2011)

- «løse en del av problemet»
- «visualiserer problemet»
- «se problemet fra en annen vinkel»

«Let etter mønster» og «gjett og sjekk» er sjelden representert i eksempler i lærebøker.

Oppgave 2 (B19-2015)

Magnus kjøpte tre leketøy. For det første leketøyet betalte han halvparten av det han hadde pluss 1 euro.

For det neste betalte han halvparten av det han nå hadde igjen pluss 2 euro.

For det siste leketøyet betalte han halvparten av det han hadde igjen etter å ha kjøpt de to første leketøyene pluss 3 euro. Da hadde han brukt alle pengene sine.

Hvor mange penger hadde Magnus før han kjøpte leketøyene?

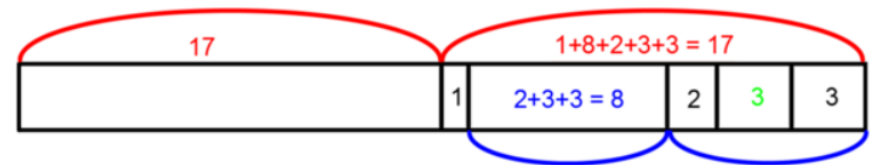
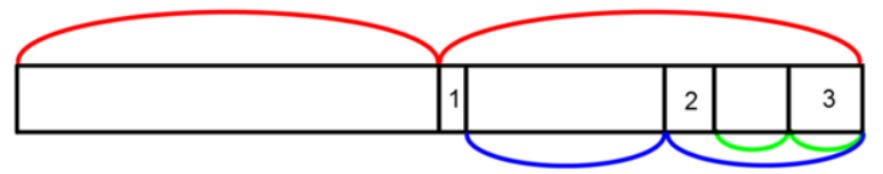
Strategien *arbeide baklengs*

Posamentier & Krulik (2009):

- at elever må ha en rimelig forståelse av problemets struktur for å kunne bruke strategien *arbeide baklengs*.
- de fleste elever lærer å ta utgangspunkt i betingelser i et problem for deretter å arbeide seg stegvis framover mot en løsning. Det kan være en grunn til at denne strategien kan være vanskelig å mestre for elever.
- Når løsningen er funnet, er det viktig å sjekke om løsningen stemmer ved å arbeide seg framover mot løsningen.
- Strategien er effektiv å bruke når motsatt/e regneoperasjon/er kan brukes.

Strategien *lag en modell*

- En modell kan være en alt fra en tegning/skisse til en modell/figur laget med konkretiseringsmateriell.
- At elever må se eksempler på ulike modeller og hvordan de kan brukes og være til hjelp i løsningsprosessen.
- Det er viktig å bevisstgjøre elevene at å tegne i matematikk er noe annet enn tegning i faget kunst og håndverk. I matematikk brukes tegning for å få en forståelse av problemstillingen i oppgaven (Fredheim (2014)).



Svorkmo, M. (2016)

Et eksempel på bruk av flere strategier i samme oppgave

Eks på klassiske «arbeide baklengs» oppgaver

B2-2008

Jonas ganger med 3, Petter legger til 2 og Niklas trekker fra 1.
De starter med tallet 3.
I hvilken rekkefølge må dette gjøres for at svaret skal bli 14?

- A) Jonas, Petter, Niklas B) Petter, Jonas, Niklas C) Jonas, Niklas, Petter,
D) Niklas, Jonas, Petter, E) Petter, Niklas, Jonas

B10-2010

Bente tenker på et tall. Hun deler tallet på 7. Så legger hun til 7, før hun til slutt ganger med 7. Svaret hun da får er 777.
Hvilket tall tenkte Bente på?

- A) 7 B) 111 C) 722 D) 567 E) 728

B14-2011

Paul ønsket å multiplisere et helt tall med 301, men han glemte 0-tallet og multipliserte med 31 i stedet. Han fikk svaret 372.
Hvilket resultat skulle han egentlig ha fått?

- A) 3010 B) 3612 C) 3702 D) 3720 E) 30720

Oppgave 3 (C9-2010)

Summen av de første hundre positive oddetall trukket fra summen av de hundre første positive partallene er?

Strategien *løs et enklere problem*

- Strategien egner seg når et problem kan deles opp. Enkeltdelene blir undersøkt, forstått og løst hver for seg før delene til slutt blir satt sammen igjen.
- Polya (1971) kaller denne prosessen for *dekomponering* og mener det i mange tilfeller kan være nødvendig å dekomponere problemet for å få løst det, spesielt hvis oppgaven som skal løses er en flerstegsoppgave.
- Kongelf (2011) har analysert lærebøker i matematikk for ungdomsskolen og funnet at "å dele opp problemet i flere deler" er det mest eksemplifiserte tilnærmingen til problemløsning i bøkene, og som oftest benyttes strategien på flerstegsoppgaver.

Oppgave 4 (C20-2012)

I tango danser dame og mann parvis med hverandre. På et tangokurs var det færre enn 50 personer til stede. Ved midnatt danset $\frac{3}{4}$ av mennene med $\frac{4}{5}$ av damene.

Hvor mange personer danset ved midnatt?

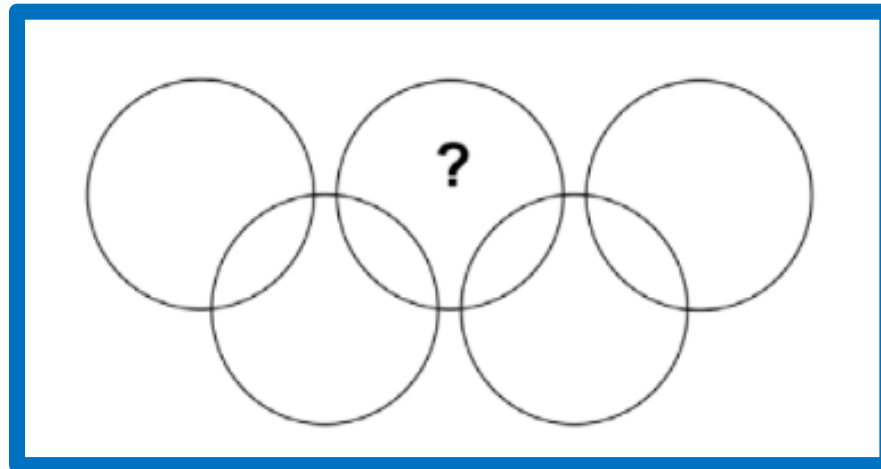
Strategien *lag en tabell eller diagram*

- Et diagram eller en tabell kan strukturere problemet slik at det kan bli enklere å løse oppgaven.
- En støtte til minnet.
- En form for en visuell representasjon.
- Diagrammer og tabeller er et nyttig verktøy i matematikk når man trenger å skaffe seg en oversikt.

Oppgave 5 (C19-2010)

På figuren ser vi 9 avgrensede områder. Plasser ett av de hele tallene fra 1 til 9 i hvert område slik at summen av tallene innenfor hver sirkel blir lik 11. Ingen tall skal brukes mer enn en gang.

Hvilket tall må stå i det området markert med spørsmålstegnet?



Strategien *prøv og feil/gjett og sjekk*

- Fra å gjette tilfeldig til å gjette etter «å ha tenkt seg om». Den sistnevnte måten å gjette på kaller Polya for kvalifisert gjetting. Det innebærer også at erfaringen/resultatet av en gjetting påvirker den neste.
- Prosessen fortsetter inntil problemløseren kommer fram til en gjetting som løser problemet.
- For å systematisere informasjonen fra hver gjetting og få en oversikt over gjettingene, egner denne strategien i kombinasjon med tabell/diagram.

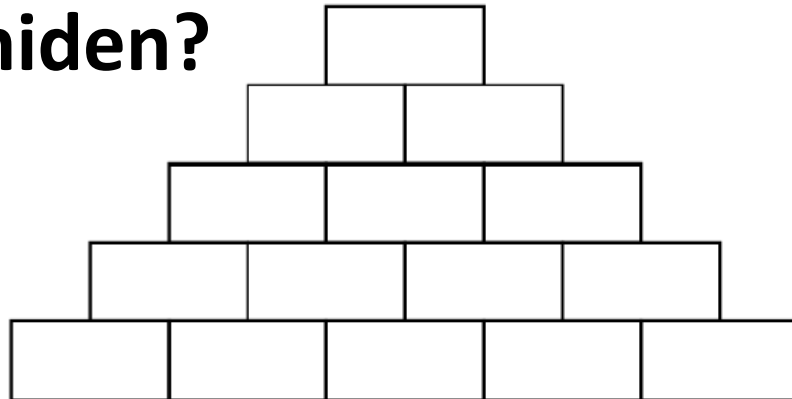
Strategien *undersøk systematisk*

- For å få oversikt over noen av eller alle mulighetene i enkelte problemløsningsoppgaver, må problemløseren tilnærme seg oppgaven systematisk.
- Evnen til å resonnerer og kvaliteten på elevs resonnerement har betydning for hvor godt den enkelte elev greier å gjøre en systematisk undersøkelse (Svorkmo, A-G, 2007).
- Både liste, tabell og diagram blir brukt til å holde styr på dataene og viser ofte veien mot løsningen. En organisert og systematisk liste kan i enkelte sammenhenger representere selve svaret på problemet (Kubat, 2014).

Oppgave 6 (C23-2017)

- I hver rute i tallpyramiden skal det stå naturlige tall. Alle tall ovenfor den nederste raden skal være summen av de to tallene i rutene rett under.

Hvor mange oddetall er det maksimalt mulig å skrive i tallpyramiden?



E18-2016

Malvin bygget et tårn med 27 legoklosser. Han delte tårnet i to slik at den ene biten fikk dobbelt så mange legoklosser som den andre. Så tok han en av de nye bitene og delte den på samme måte. Slik fortsatte han.



Hvilket antall legoklosser er det umulig å få ved å dele tårnet på denne måten?



(A) 2



(B) 4



(C) 6



(D) 8



(E) 10

B24-2016

Vi har to tresifrede tall som består av seks ulike sifre. Sifferet på hundrerlassen i det ene tallet er dobbelt så stort som sifferet på enerlassen i det andre tallet.

Hvilket alternativ nedenfor er den minste mulige summen av to slike tresifrede tall?

- A) 597 B) 588 C) 572 D) 537 E) 381

B19-2013

I en fotballkamp ble det scoret 6 mål i første omgang, og bortelaget ledet kampen. I andre omgang scoret hjemmelaget 3 mål og vant kampen. Det var ingen selvmål i kampen.

Hvor mange mål scoret hjemmelaget til sammen i hele kampen?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Kombinasjon av flere strategier

- Posamentier & Krulik (1998) hevder at enkelte problemløsningsoppgaver kan ha mer enn en egnet strategi, eller at en kombinasjon av flere strategier er gunstig.

Noen oppgaver kan for eksempel løses i kombinasjon av strategiene "løs et enklere problem", «lag en tabell eller diagram», «undersøk systematisk» og "let etter mønstre". Elevene bør få mulighet til å vurdere og diskutere alternative løsningsmetoder (strategier) for et gitt problem. De kan for eksempel sammenligne sin løsningsmetode med medelevers metoder eventuelt metoden som er gitt i læreboka (Kubat, 2014).

Noen favorittoppgaver

Kortoppgaven E/B-2006

Sju kort ligger i ei eske. På hvert av kortene er det skrevet ett av tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6 eller 7.

Eva trekker tre kort fra eska, og Lars trekker to kort. Da er det to kort igjen i eska. Eva ser på kortene sine og sier til Lars: «Jeg vet at summen av kortene dine er et partall».

Hva er summen av Eva sine kort?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

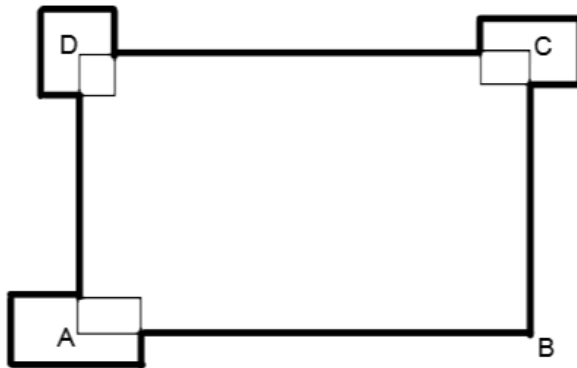
Blekksprutoppgaven B24-2010

I landet Fantasia finnes det 6-, 7- og 8-armede blekkspruter. De som har 7 armer lyver alltid, mens de som har 6 eller 8 armer snakker alltid sant.

En dag møttes fire blekkspruter. Den **blå** blekkspruten sa: «Vi har til sammen 28 armer». Den **grønne** sa: Vi har til sammen 27 armer». Den **gule** sa: «Vi har 26 armer til sammen» og den **røde** sa: «Vi har 25 armer til sammen»

Hvilken farge har blekkspruten som snakker sant?

B18-2016



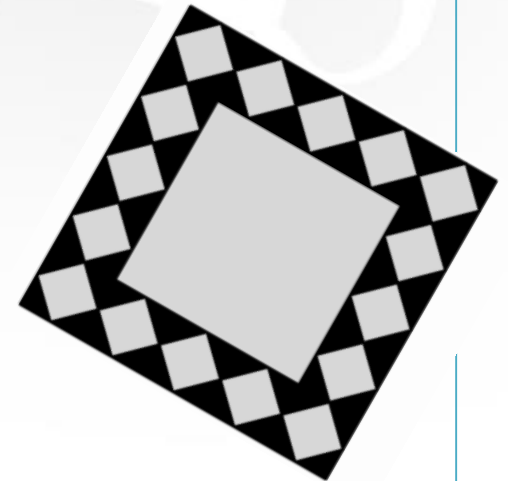
Rektangelet ABCD har omkrets 30 cm. Tre mindre rektangler er plassert slik at midtpunktet i hvert av rektanglene er i punktene A, C og D (se figuren). Summen av omkretsen til de tre minste rektanglene er 20 cm.

Hvor lang er omrisset til figuren (den tykke streken)?

- A) 50 cm B) 45 cm C) 40 cm
D) 35 cm E) Umulig å finne ut

C20-2017

- Duken på bildet er laget med et regulært mønster. **Hvor stor del av duken er svart?**



- A) 16% B) 24% C) 25%
D) 32% E) 36%

Passende løsningsstrategi/er

- Utvikle elevenes problemløsningskompetanse, ved at elever får erfaring med ulike strategier, at de får se eksempler på, sammenligne og diskutere ulike strategier.
- Flerstegsoppgaver anbefales
- Å «sitte fast» i en metode på lavere nivå
(Cronhjort og Thunberg, Lärportalen, Skolverket)

For å hjelpe elevene å utvikle forståelse for sammenheng og metoder, må læreren velge problemoppgavene ut fra det elevene skal lære.

Tips

- Temabaserte problemløsningsoppgaver for mellomtrinn- og u.trinn
<http://www.matematikkenteret.no/content/5636/Temabaserte-problemlosningsaktiviteter>
- Temabaserte problemløsningsoppgaver for u.trinn og vgs
<http://www.matematikkenteret.no/content/6265/Problemlosning-soppgaver>
- Oppgaver fra 1.-3. trinn og 11.-13. trinn finnes på nettsidene til NCM i Sverige: www.NCM.gu.se
- Problemløsning fra Matematiklyftet (**med problembank!**):
1.-9. trinn: <https://larportalen.skolverket.se>
- Tangenten, tidligere nummer med Kengurusiden, div. temanummer.

Lenker

- Björkqvist, O. (2003). *Matematisk problemløsning*. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51-70). Bergen: Fagbokforlaget.
- Cronhjort, M. og Thunberg, H.: Att undervisa centralt innehåll genom problemlösning, Lärportalen, Skolverket. Lastet ned 27.11.17:
https://www.kth.se/polopoly_fs/1.529513!/Del%20%20Probleml%C3%B6sning%20och%20central%20inneh%C3%A5ll.pdf
- Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiske problem – inspirasjon till variasjon*.
- Kongelf, T. R. (2011). *What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway?* *Nordic Studies in Mathematics Education*, 16 (4), 5–44.
- Kubat, Z. (2014). *Språkets betydning i matematikkfaget, elevs lesestrategier og løsningsstrategier i arbeid med tekstoppgaver*. Alta: Masteroppgave i spesialpedagogikk og tilpasset opplæring.
- Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.
- Pólya, G. (1971). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2. utgave). Princeton, N.J. : Princeton University Press.
- Posamentier, A. S. & Krulik, S. (Eds.). (2009). *Problem solving in mathematics, grades 3-6: powerful strategies to deepen understanding*. Corwin Press.
- Posamentier, A. S. & Krulik, S. (1998). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oakes: Corwin Press.
- Svingen m.fl. (2015). *Matemagisk*. Læreverk 6a, Achehoug.
- Svorkmo, A-G., (2007). *Rike matematiske problemer og spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen*. Trondheim: Masteroppgave, Høgskolen I Sør-Trøndelag avdeling for lærer- og tolkeutdanning.
- Svorkmo, M. (2016). *Halvparten og litt til*, i Tangenten 1 2016.
- Torkildsen, S. (2017). *Matematisk problemløsning*. Lastet ned fra:
<http://www.matematikkcenteret.no/content/4791/Innholdsside>