Aspekter ved tallforståelse

Forfatter
Anita Valenta, Matematikksenteret

Publisert dato: Mai 2015 **(redigert okt.2016)**

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

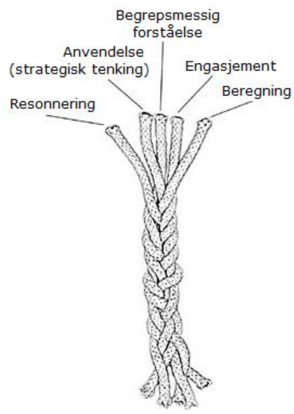
Utvikling av tallforståelse framheves i mange studier som svært viktig for elevenes læring av matematikk. Men det er ikke åpenbart hva tallforståelse innebærer. Case (1998) beskriver tallforståelse slik:

> Number sense is difficult to define but easy to recognize. Students with good number sense can move seamlessly between the real world of quantities and the mathematical world of numbers and numerical expressions. They can invent their own procedures for conducting numerical operations. They can represent the same number in multiple ways depending on the context and purpose of this representation. They can recognize benchmark numbers and number patterns: especially ones that derive from the deep structure of the number system. They have a good sense of numerical magnitude and can recognize gross numerical errors that is, errors that are off by an order of magnitude. Finally, they can think or talk in a sensible way about the general properties of a numerical problem or expression- without doing any precise computation. (p. 1)

Her fremhever Case fleksibilitet i arbeidet med tall og regneoperasjoner, bruk av ulike representasjoner, utvikling av hensiktsmessige strategier, overslagsregning, identifisering og bruk av ulike mønster, resonnering om egenskaper av tall og operasjoner. McIntosh, Reys and Reys (1992)[1] fremhever i tillegg et emosjonelt aspekt i sin definisjon av tallforståelse:

> Number sense refers to a person's general understanding of number and operations along with the ability and inclination to use this understanding in flexible ways to make mathematical judgments and to develop useful strategies for handling numbers and operations.

Deres definisjon består av tre hovedelementer: 1) generell forståelse av tall og operasjoner, 2) bruk av slik forståelse i matematisk resonnering og utvikling av hensiktsmessige strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner og 3) lyst til å gå inn i matematiske problemstillinger og bruke forståelsen i arbeid med tall.



Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tankegang), resonnering og engasjement. De fremhever at disse fem komponentene er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Komponentene støtter hverandre, og det er viktig at elevene får mulighet til å utvikle alle fem komponentene samtidig. Forbindelsen mellom de ulike komponentene blir da forsterket og elevene utvikler en matematisk kompetanse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant. De fem komponentene finner vi igjen i sitatene om tallforståelse fra Case og McIntosch et al., og

[1] sitert i Anghileri (2006), *side 5*

denne definisjonen av matematisk kompetanse kan ses som et mulig utgangspunkt for nærmere drøfting av tallforståelse.

Nedenfor presenteres det en kort beskrivelse av de fem komponentene i matematisk kompetanse, og det drøftes ulike aspekter ved tallforståelse innen hver komponent. De ulike aspektene er utviklet gjennom en gjennomgang av forskning som knyttet til arbeid med tall på mellomtrinnet[2] og analyse av det faglige innholdet i oppgaver som er blitt utviklet for arbeid med tall og regning på mellomtrinnet innen ulike matematikkdidaktiske prosjekter[3].

Det er tett sammenheng mellom aspektene ved tallforståelse beskrevet nedenfor. De går delvis inn i hverandre og det er ikke lett å trekke grenser mellom det. Målet med å beskrive tallforståelse i form av noen aspekter er heller ikke å kunne isolere de ulike elementene, men heller fremheve viktige elementer av tallforståelse og gi eksempler på hva de kan gå ut på.

Begrepsmessig forståelse

innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Det handler også om å tolke og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom ulike representasjoner ut fra hva som kan være nyttig for et gitt formål. Innenfor tallforståelse kan denne komponenten ses som bestående av følgende aspekter:

Ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner består i å representere positive og negative hele tall, brøk og desimaltall symbolsk, på tallinje, med ulike illustrasjoner/tegninger, konkreter og regnefortellinger. Det å kunne tolke de ulike representasjonene og veksle mellom dem er av stor betydning for utvikling av tallforståelse.

Eksempler:

Representere tallet seks som
- en mengde på 6 objekter (som kan være delt opp på ulike måter)
- kvantifisering av en fysisk størrelse (som f.eks. en lengde på 6)
- et tall på tallinja som står i relasjon til andre tall (er f.eks. større enn 5 og mindre enn 6,2)
- symbolet "6"
- summen av 1 og 5, produktet av 2 og 3,osv

[2] se for eks.: Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2009; Kamii & Dominick, 1997; Markovits & Sowder, 1994; Reid, 2002; Schifter, 2009; Selter, Prediger, Nuhrenborger, &Husmann, 2012; Saxe, Diakow, & Gearhart, 2012; Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2013; Wagner & Davis, 2010, Stylianides & Ball, 2008; Schoenfeld, 1992.

[3] se for eksempel: Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Fosnot & Dolk, 2001, 2002; Lamon, 2006; Parrish, 2010; Russell, Schifter, & Bastable, 2011.

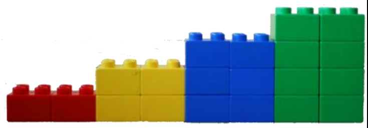
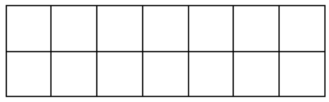
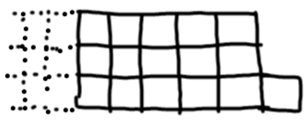
Representere tallet tre fjerdedeler som

- som et tall på tallinja
- som tallet vi får når vi regner ut 3 : 4
- symbolet $\frac{3}{4}$

Gjennom ulike situasjoner som f.eks.

- 3 hele skal deles på 4 personer
- en person får tre firedeler av en mengde

Ulike egenskaper ved tall består i å kjenne til og kunne beskrive egenskaper ved tall, identifisere tall som har egenskapene, beskrive strukturer og representere dem på ulike måter. *Eksempler:*

Partall er • tall som er delelig med 2 • er på formen $2 \cdot n$ der n er et naturlig tall • et antall klosser som gir to like lange tårn	
14 er et produkt av tallene 2 og 7. Det betyr at vi kan representere 14 $2 \cdot 7$ og som f.eks. • som antall ruter i et rutenett med 2 rader og 7 ruter i hver rad • som antall drops i to poser med 7 drops i hver pose.	
Et tall som har rest 1 når det divideres med 3 kan representeres som • $3 \cdot n + 1$ der n er et helt tall • et antall drops som kan fordeles på 3 poser slik at det er like mye i hver pose, og så er det ett drops til overs • som antall klosser i tre tårn der det ene har en kloss mer enn de to andre	

Relasjoner mellom tall består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall, gjenkjenne relasjonene og representere dem på ulike måter. *Eksempler:*

Større enn og mindre enn, som at

- et tall er 5 større enn et annet, differansen mellom dem er 5
- et tall er 3 ganger større enn et annet tall
- sammenligning et gitt tall med noen "referansetall" som 10, 100, 25, 1, 1/2, osv., avhengig av t og situasjonen

Tall som har samme struktur

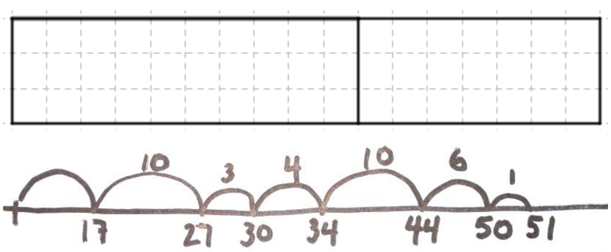
- 29 og 139 er begge på formen $10 \cdot n - 1$
- tall med 5 som faktor kan skrives på formen $5 \cdot n$ og representeres også som f.eks. antall drops i poser, med 5 drops i hver pose

Relasjoner som bygger på posisjonssystemet består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall som kommer av posisjonssystemet, fleksibilitet i overgang mellom symboler (tallene skrevet i 10-tallssystemet) og størrelsen av tallet. *Eksempler:*

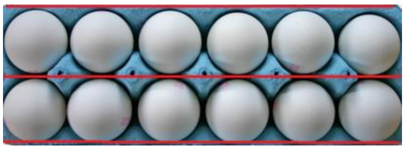
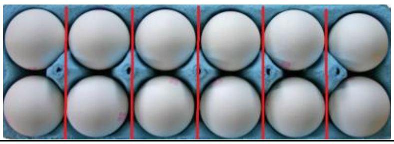
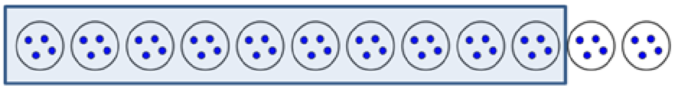
Se på 123 som	Se på 0,7 som	Se på 1,2 som
• 1 hundrer, 2 tiere og 3 enere • 12 tiere og 3 enere • 11 tiere og 13 enere • …	• 10 ganger mindre enn 7 • 10 ganger større enn 0,07 • 7 tideler • …	• 100-delen av 120 • 10 ganger større enn 0,12 • …

57 drops	10-pakker	0	1	2	3	4	5
	enkel	57	47	37	27	17	7

Ulike måter å representere regneoperasjoner på og overganger mellom representasjonene innebærer å kunne representere regneoperasjoner symbolsk, med konkreter og tegninger, på ei tallinje og gjennom regnefortellinger. Det innebærer også å kunne tolke representasjonene og skifte mellom dem. *Eksempler:*

Kjenne igjen regneoperasjoner i ulike typer regnefortelinger fra hverdagen og beskrive konteksten symbolsk.	23 elever skal deles i firer-grupper. 23 : 4 = 5, rest 3 Fem grupper med fire og ei gruppe med 3.
Kunne presentere et gitt regnestykke i form av en regnefortelling eller en illustrasjon, for eksempel representere • et subtraksjonsstykke som en differanse på ei tallinje • et multiplikasjonsstykke som antall ruter i et rutenett eller som "hopp" på tallinjen ($3 \cdot 17$)	
Kjenne til ulike typer situasjoner som svarer til en gitt regneoperasjon, kunne forklare likheter og forskjeller mellom dem.	-"ta bort" og "differanse" i subtraksjon - multiplikasjon som "like grupper", rutenett, areal av en rektangel, forstørring

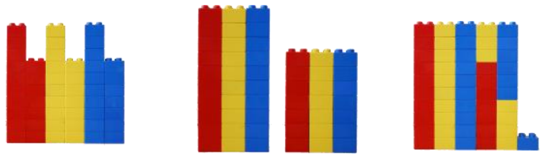
Grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner handler om kjennskap til den kommutative, asssosiative og distributive egenskapen ved regneoperasjoner, kunnskap om motsatte regneoperasjoner og identitetselementer. Det innebærer å kunne uttrykke egenskapene på ulike måter og se sammenhenger mellom dem. *Eksempler:*

Kommutativ egenskap ved multiplikasjon: $a \cdot b = b \cdot a$ (Tilsvarende egenskap ved addisjon) $2 \cdot 6$  $6 \cdot 2$ 
Assosiativ egenskap ved addisjon $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Tilsvarende egenskap ved multiplikasjon) Når man skal legge sammen tre tall, som f.eks. 24, 11 og 9, så kan man legge sammen 11 og 9 først, så 24, eller man kan legge sammen 24 og 11 først, så 9. Det blir likt. $24 + (11 + 9) = (24 + 11) + 9$. Det kan man se ved å tenke seg for eksempel tre sjokolader som koster 24, 11, og 9 kroner og vi skal finne prisen tilsammen. Da spiller det ingen rolle hvilke to priser vi starter med å addere før vi legger den siste, prisen blir den samme til slutt.
Den distributive egenskapen: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ $12 \cdot 4 = (10 + 2) \cdot 4$ 
Addisjon og subtraksjon er motsatte operasjoner, at $(a + 5) - 5 = a$. Tilsvarende med multiplikasjon og divisjon: $(a : 7) \cdot 7 = a$.
0 er det tallet som er slik at $a+0=a$ for alle tall a, og tallet $-a$ er slik at $a+(-a)=0$; Tilsvarende, 1 er det tallet som er slik at $a \cdot 1 = a$, og tallet $1/a$ er slik at $a \cdot 1/a = 1$.

Beregning

handler om å kunne utføre ulike matematiske prosedyrer nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig. Fleksibilitet består i å veksle mellom ulike prosedyrer og foreta hensiktsmessige valg i en gitt situasjon. Følgende aspekter kan sees som sentrale når det gjelder beregning:

Utvikling av varierte strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner handler om å kunne utvikle ulike strategier med utgangspunkt i regnefortellinger, illustrasjoner, tallinje, konkreter eller i symboler. Strategier kan også utvikles gjennom arbeid med mønster. Overganger mellom de ulike representasjonene er av stor betydning også her. Hvis en strategi utvikles for eksempel gjennom en regnefortelling, er det viktig at den også beskrives symbolsk slik at en bevissthet om fremgangsmåten generaliseres utover den gitte konteksten. *Eksempler:*

For å regne ut antall drops i 4 poser med 49 drops, kan man utnytte at 49 drops er 1 færre enn 50 og at vi da kan regne ut 4 · 49 som 4 · 50 – 4 · 1	$4 \cdot 5$ $4 \cdot 50$ $4 \cdot 49 = 4 \cdot 50 - 4$ 50 50 50 50 -1 -1 -1 -1
Regne ut 3 · 17 ved å tenke på 17 som 17 klosser som deles opp i 10 og 7. Da kan vi se 3 · 17 som 3 · (10 + 7) = 3 · 10 + 3 · 7	
Tenke på 501-398 som differansen mellom tallene og regne «bakover». 501 – 398 = 1 + 100 + 2	
12 : 4 = 3 12 : 2 = 6 12 : 1 = 12 12 : ½ = ?	Hva er likt i de tre første regnestykkene? Hva er forskjellig i de tre første regnestykkene? Er det noen relasjoner mellom tallene? Hva kan svaret på det siste regnetykket være mønsteret fortsetter?

Bruk av varierte strategier består i å beherske ulike skriftlige og muntlige strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner, kunne bruke estimering og digitale hjelpemidler. I denne artikkelen skilles det ikke spesielt mellom muntlige og skriftlige strategier, siden det gjerne er den samme tenkingen som ligger i bunn og det avhenger av tallene om det kan være nødvendig å notere noe underveis. I de ulike regnestrategiene er det forskjellige egenskaper ved tall, posisjonssystemet og operasjoner som utnyttes. *Eksempler:*

For å estimere 75 · 89 kan vi runde av 89 til 100 og se at svaret må være under 7500.
Man kan resonnere videre at svaret er ca. 90% av 7500, og må ligge i området 6500-7000.

Noen forslag for mulige strategier/fremgangsmåter for å beregne 75 · 89 eksakt kan være:

- (10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5) · 89
- 7 · (10 · 89) + (10 · 89) : 2
- (100 – 25) · 89, der 25 · 89 er en firedel av 100 · 89

○ ¾ · (100 · 89) ○ 75 · (100 – 10 – 1) 7500 - 750 - 75 I de forskjellige strategiene utnyttes egenskapene av multiplikasjon og de involverte tallene, posisjonssystemet og ulike referansetall.
Noen mulige strategier for å regne ut 127 + 206 der utnytter man posisjonssystemet samt assosiativ og kommutativ egenskap for addisjon kan være: ○ 120 + 200 + 7 + 6 = 320 +13 ○ 127 + 200 + 6 = 327 +6 ○ 206 +120+7 = 326 + 7 ○ 130 + 206-3 = 336 - 3 ○ 130 + 210 – 3 - 4 = 340 - 7

Valg av en hensiktsmessig strategi handler om å kunne vurdere hvilken strategi som kan være hensiktsmessig for det gitte regnestykket og for den gitte situasjonen. Selv om det kan være mange fremgangsmåter for å finne svar i et gitt regnestykke, er gjerne noen strategier mer hensiktsmessige enn andre for akkurat de gitte tallene. I mange situasjoner, spesielt de som er knyttet til dagliglivet, er det heller ikke så viktig med et helt nøyaktig svar, det holder med et estimat. Videre, i situasjoner der nøyaktig svar er viktig, der utregninger ikke står i fokus og der tallene er "lite pene", kan bruk av kalkulator være mest hensiktsmessig.

Eksempler:

For å regne ut 0,25 · 36 kan det være hensiktsmessig å utnytte det som er spesielt med tallet 0, 25 – det at det er det samme som en firedel. 0,25 · 36 er slik det samme som en fjerdedel av 36 og det 9.
For å regne ut 17 · 98 kan det være lurt å utnytte 98 er nær 100. Strategien blir da 17 · 100 – 17 · 2 = 1700 – 34.
For å regne ut 235 – 197 kan en hensiktsmessig strategi være å øke begge tallene med 3. Da får man et enklere regnestykke 238 – 200, og differansen er fortsatt den samme. En annen strategi som kanskje er like hensiktsmessig er å ta 200 som referansetall og se på begge de involverte tallene ut fra det - differansen mellom 235 og 200 er 35, mellom 200 og 197 er det 3; differansen mellom 235 og 197 er da 35 + 3. Her er det lite hensiktsmessig å dele opp begge tallene ut fra posisjonssystemet (som i standardalgoritmen).
For å finne ut hvor mange pakker drops man kan kjøpe for 100 kroner når hver pakke koster 11,90 kr, kan det være hensiktsmessig å runde av prisen og estimere.
I situasjoner der man trenger et nøyaktig svar på regnestykker som 68 · 842 eller 134,24 : 51,2 er bruk av digitale hjelpemidler et naturlig valg.

Effektivitet og nøyaktighet er viktige elementer i arbeid med regneoperasjoner. Arbeid med matematiske problem krever ofte en del utregninger, og det kan være greit at man etter hvert kan utføre dem uten å være nødt til å tegne og telle. Effektivitet og nøyaktighet i beregning bygger på automatisering av enkle tallfakta (som 9+5 = 14 og 12·10 = 120), et spekter av referansetall og et bredt utvalg av strategier man kan velge mellom. Erfaringer med tallfakta i ulike situasjoner, gjennom ulike representasjoner og med fokus på strukturer og relasjoner vil etter hvert føre til automatisering. Erfaringer med ulike strategier og diskusjoner om hvilke som kan være hensiktsmessige i en gitt situasjon, kan legge til rette for en gradvis effektivisering av valg av strategi for å løse et gitt problem og utnyttelsen av faktakunnskap.

Eksempler:

En effektiv strategi for å regne ut 128 : 8 kan være å se 128 som 12 tiere og 8 enere, og det skal deles på 8. Det gir 1 hel tier til hver. Da er det 48 enere igjen. 48 : 8 er 6 og svaret blir 10 + 6 = 16. I strategien gis divisjonen “deles på et antall personer” mening. Posisjonssystemet og veksling mellom tiere og enere utnyttes for å ta i bruk faktakunnskap og gjøre utregningen enklest mulig.
Når man skal regne ut 75 · 89, kan det være en effektiv strategi å ta utgangspunkt i at 75 · 100 = 7500 og så subtrahere en tidel og en hundredel. Da utnyttes strukturen av tallet 89 som 100-10-1. Det gjøres for å kunne utnytte at multiplikasjon med 100, 10 og 1 er (etter hvert) faktakunnskap. Utregningen blir nå enkel nok til at mange kan regne det ut i hode. 7500 - 750 - 75

Anvendelse eller strategisk tankegang

innebærer å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemer, representere dem på en hensiktsmessig måte, tenke fleksibelt i utvikling av en løsningsstrategi og vurdere hvor rimelig løsningene er. Denne komponenten svarer til kompetansen knyttet til det man ofte kaller for problemformulering og problemløsing i matematikkdidaktisk litteratur. Med matematiske problemer menes det her problem i hverdags-, arbeids- og samfunnsliv der matematikk kan anvendes, men også abstrakte matematiske problem og spørsmål. Kjennetegnet på et "problem" er at man ikke har opparbeidet en rutine for å løse det. Man trenger å utvikle en strategi for å løse problemet. Dette innebærer at det som er et problem for noen ikke trenger å være det for noen andre. Eksemplene og diskusjonen senere i teksten må betraktes ut fra denne forståelsen av matematisk problem. Følgende aspekter kan sees som sentrale når det gjelder anvendelse/strategisk tankegang knyttet til tallforståelse:

Gjenkjenning og formulering av matematiske problem innebærer å identifisere situasjoner der ulike begreper og ideer knyttet til tall og talloperasjoner kan brukes til å beskrive situasjonen og formulere og finne løsning for et matematisk problem. *Eksempler:*

Finne ut om vafler som selges i kantina har for høy pris.	
Finne ut hvor langt en bil kan kjøre med full tank.	
Finne ut om alle hele tall som har 5 som faktor har 0 eller 5 som siste siffer, og hvorfor de gjør det i så fall.	
Hva vil klassefesten koste per person?	

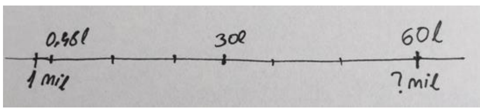
Representasjon av problem. Når et problem er formulert, må den representeres matematisk for å kunne arbeide med det videre. Problemet kan representeres muntlig, symbolsk, ved hjelp av tabeller og grafer, tegninger eller konkreter. Den valgte representasjonen spiller en rolle for hvilke muligheter en ser for videre arbeid, det er derfor viktig å velge representasjonsformen strategisk. For å representere problemet, må elevene vurdere hva som er dets nøkkelelementer og hvilken representasjon som kan fange dem opp. Innhenting av nødvendig informasjon, kvantifisering av ulike størrelser, valg av variabler man skal se på og relasjonene mellom dem er viktige elementer i arbeidet. Videre vil det å representere strukturen til de involverte matematiske begrepene og relasjonene være sentralt. *Eksempler:*

For å finne ut hvor langt en bil kan kjøre med full tank, må vi først finne ut hvor mye ”en full tank” er, og vi må finne ut hvor mye en bil bruker. Det er de to variablene som spiller en rolle her. Størrelsen på tanken og forbruket er forskjellig, og man kan for eksempel søke på nettet etter en oversikt for ulike typer biler. Skal man velge å se på gjennomsnittet for alle typer eller ta utgangspunkt i bare se som er mest brukt? Bilenes forbruk er avhengig av type kjøring, bilene bruker for eksempel mer energi i bykjøring enn i kjøring på motorvei. Skal man se på gjennomsnittet eller ta utgangspunkt i en spesiell type kjøring? Når man har kvantifisert de to størrelsene, må man finne ut hvordan relasjonen mellom dem er og hvordan problemet kan representeres. Man kan for eksempel bruke en tabell, en dobbel tallinje eller representere problemet symbolsk.

0,48 l/mil

0,48	0,96
10	20

ca 1L for 20km



0,48 *l* for 1 mil

0,48 · 2 for 2 mil

0,48 · ? for ? mil og 0,48 · ?=60

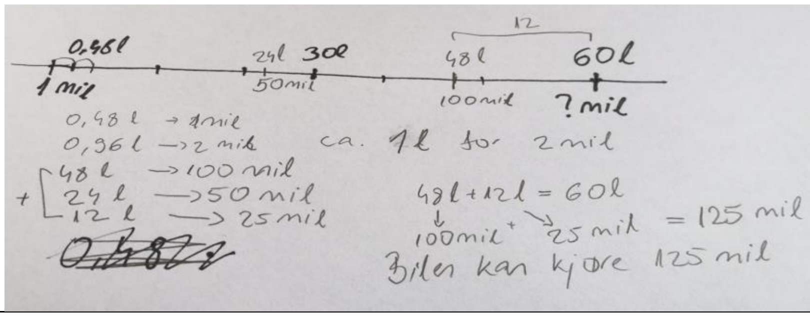
For å finne ut om alle naturlige tall som har 5 som faktor må ha siste siffer siffer 5 eller 10, må man tenke på innholdet i begrepene “naturlige tall”, “siste siffer” og ”er faktor i”, og på hvordan problemet kan representeres. Naturlige tall er 1, 2, 3, 4, … de er positive, har ingen desimaler. De kan tenkes som antall av noe. Tallet har noen enere, tiere, hundrere, tusener osv. At 5 er faktor i et tall betyr at tallet kan deles på 5, at svaret er et naturlig tall, at divisjonen går opp. Man kan tenke på det som tall i 5-gangen, eller tall som består av bare 5-ere. Ulike måter å representere situasjonen på kan for eksempel være:

- Et tall = noen enere + noen tiere + noen hundrere + … Hvis 5 går oppi tallet, hvordan må det tallet være?
- Hvis fem personer deler penger likt og de får et helt antall kroner (ingen ører), kan vi da være sikre på summen de delte mellom seg slutter på 5 eller 0?
- Hvilket siffer på enerplassen kan et tall som består av bare 5-ere ha?


......

Utvikling av løsningsstrategi skjer med utgangspunkt i hvordan man har valgt å representere problemet. Man utforsker problemet systematisk, søker etter mønster og system og anvender kunnskap om tall, regneoperasjoner, sammenhenger og fremgangsmåter. For å få bedre innsikt i ulike sider ved problemet kan det være nyttig å skifte mellom ulike representasjoner underveis i arbeidet. Strategisk tankegang innebærer å kunne utvikle, sammenligne og vurdere *ulike* strategier ut fra hvor hensiktsmessige og effektive de er i den gitte situasjonen. *Eksempel:*

En mulig løsningsstrategi der man tar utgangspunkt i dobbel tallinje for tank-problemet er som til høyre.



Vurdering av svar dreier seg om å overveie størrelsene,se for seg situasjonen, tenke gjennom om svaret kan være rimelig. Det innebærer også å tenke gjennom om det er noe som kan ha betydning for beregningene og som det ikke er tatt hensyn til under arbeidet. *Eksempler:*

I løsningsforslaget ovenfor et det notert underveis at det trengs ca. 1 liter for å kjøre 2 mil. Det kan gi et bilde av størrelsesforhold i situasjonen og brukes til å vurdere hvor rimelig svaret er til slutt. Om spørsmålet var annerledes, som for eksempel om en full tank rekker til en tur fra Trondheim til Oslo, ville det ikke vært nødvendig med videre beregninger.

For å finne ut om alle hele tall som har 5 som faktor har 0 eller 5 som siste siffer, kan man sjekke alle multiplum av 5 opp til 100. Betyr det at det gjelder for alle multiplum av 5?

Resonnering

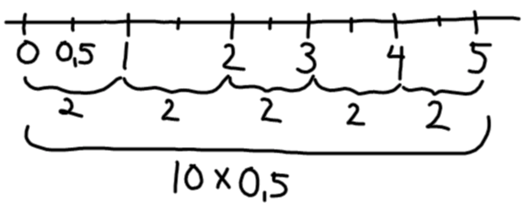
handler om å kunne tenke logisk omkring relasjoner mellom begreper og situasjoner, reflektere, utforme hypoteser, forklare og argumentere for sammenhenger mellom ulike begreper, egenskaper og framgangsmåter. Ofte tenker man på matematisk resonnering først og fremst som formelle matematiske bevis og deduktiv tenking, men Kilpatrick m.fl. (2001) ser på resonnering bredere og inkluderer også intuitiv og induktiv resonnering og argumentasjon ut fra mønster, tegninger og konkreter. Innen tallforståelse handler resonnering om ulike sammenhenger og egenskaper ved tall og regneoperasjoner, og man kan skille mellom det å resonnere om og begrunne noe for et enkelt eksempel, for et endelig eller for en uendelig antall eksempler.

Utgangspunktet i et resonnement kan være ulike definisjoner, aksiomer, tidligere etablerte resultat og matematiske sammenhenger som er akseptert av klassen og ikke trenger nærmere begrunnelse. Både utgangspunktet, måter å resonnere på og måter å uttrykke resonnementet på er avhengige av elevers tidligere kunnskap og erfaring og vil være forskjellig fra trinn til trinn og klasse til klasse. Et resonnement må ikke bare være matematisk holdbart, men også tilpasset elevgruppen. Når det gjelder tallforståelse på mellomtrinnet, kan resonneringskomponenten av matematisk kompetanse ses bestående av følgende aspekter:

Gjenkjenning og beskrivelse av struktur, mønster og sammenhenger i arbeidet med tall
består i å søke etter og beskrive mønster og sammenhenger. Dette er det første steget i resonnering, utforming av hypoteser og utforskning. *Eksempler:*

I sekvensen av regnestykker nedenfor fremheves det en sammenheng mellom divisor (halveres) og kvotient (dobles). Denne sammenhengen kan lede til observasjon av ulike relasjoner som kan diskuteres videre: 12 : 4 = 3 12 : 2 = 6 12: 1 = 12 12 : ½ = ? - Svaret på 12 : ½ er 24 - Når divisor et et divisjonsstykke halveres, så dobles svaret - Når vi deler et tall med en brøk som har 1 i teller, så multipliserer vi tallet med nevneren
En elev sier: "Jeg tror at 99 · 11 = 999. Det er fordi at når man ganger et tall med 11, så gjentas tallet. Som for eksempel 3 · 11 = 33, 7 · 11 = 77 og 8 · 11 = 88."

Resonnering omkring enkelteksempler består både i å kunne begrunne og kommunisere egne resonnement om enkelteksempler og å kunne følge med i andres resonnement. Bruk av forskjellige representasjoner er viktig for å kunne se hva som skjer og hvorfor. *Eksempler:*

<table>
<tr><td colspan="2">12 · 35 = 10 · 35 + 2 · 35 fordi jeg kan tenke på 12 · 35 som 12 hauger med 35 kroner i hver. Jeg regner først ut hvor mye penger det er i 10 hauger, og så de to siste haugene. Da legger jeg sammen de to delene til slutt.
Hvis den distributive egenskapen er kjent fra før, kan argumentasjonen være: Jeg deler 12 opp i to deler, multipliserer begge med 35 og legger sammen til slutt.</td></tr>
<tr><td>Tallet 5 er 10 ganger større enn tallet 0,5.
Det er fordi 0,5 betyr 5 tideler, og hvis man skal finne tallet som er 10 ganger større så tar man altså "5 tideler" 10 ganger. To og to "5 tideler" blir 1, så vi får 5 til slutt.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">31 · 10 er 310 fordi man kan tenke på det som 31 tiere.
Ti tiere er 100, 30 tiere er 300, så 31 tiere er 310</td></tr>
</table>

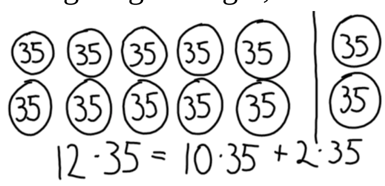
Resonnering omkring endelig antall eksempler. For å undersøke en sammenheng som gjelder endelig antall eksempler, kan man enten prøve ut alle eksemplene systematisk eller utforme et generelt argument som handler om alle de gitte eksemplene. *Eksempler:*

I undersøkende oppgaver er det ofte spørsmål om å finne alle mulige svar, som for eksempel: ”Stian trekker tre mynter fra sparegrisen. Hvor mye penger kan han ha trukket?” Begrunnelser for at man har funnet alle mulige svar, baserer seg gjerne i at man har tenkt systematisk, og at det ikke kan finnes flere alternativer enn de man har listet opp.
For å finne tallet mellom 50 og 100 som har flest divisorer, kan en mulighet være systematisk å undersøke antall divisorer for alle tall i intervallet. En annen mulighet er å resonnere generelt om hva som skal til for at et tall har mange divisorer – primtall kan man se bort fra; ser man på tall som er produkt av to primtall, så har de fire divisorer hvis primtallene er forskjellige (som 15=3 · 5), men bare tre divisorer om det er samme primtall (som 9 = 3 · 3). For å finne tallet med flest divisorer, kan det derfor kanskje være lurt å se på tallene som er produkt av flest mulig forskjellige primtall.

Resonnering omkring uendelig antall eksempel. Mange elever vil argumentere for hypoteser som angår uendelig antall eksempler empirisk, ved å prøve ut på noen eksempler. Å prøve ut hypotesen på noen eksempler kan gi bedre forståelse for hva som skjer, men er, matematisk sett, ikke en gyldig argumentasjon. Argumentasjon for en hypotese som omhandler uendelig mange eksempler innebærer enten bruk av et generisk eksempel eller et deduktivt oppbygd generell resonnement. Et generisk eksempel er en måte å argumentere på der man bruker et eksempel ”på en generell måte”, for å se hva som skjer og hvorfor. Situasjoner som omhandler uendelig antall eksempler kan også undersøkes med generelle resonnement som bygger på kjente resultater, gjerne ved å ta i bruk algebraisk notasjon. I utforming av argumentasjon for at en hypotese som omhandler mange eksempler ikke er gyldig, er det ofte nyttig å finne et moteksempel. Klarer man å finne et eksempel der hypotesen ikke holder, kan man konkludere med at den ikke er gyldig. *Eksempler*:

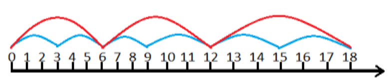
Man kan alltid dele opp et av tallene i en multiplikasjon, og så multiplisere hvert av leddene med det andre tallet, som i 12 · 35 = 10 · 35 + 2 · 35. Vi kan også dele opp 12 i 7 + 5 eller 3 + 9, eller andre mulige kombinasjoner.

Det er fordi vi kan tenke på 12 · 35 som penger som er 12 hauger, 35 kroner i hver, og vi lurer på hvor mye penger det er, så kan vi dele haugene i 10 hauger og 2 hauger, finne ut hvor mye penger det er i hver av delene, så legge sammen. Det kan vi alltid gjøre, uansett antall hauger og hvor mye penger det er i hver haug.
Eksemplet med 12 · 35 brukes som et generisk eksempel i resonnementet.



Alle tall som er delelig med 6 er også delelig med 3.

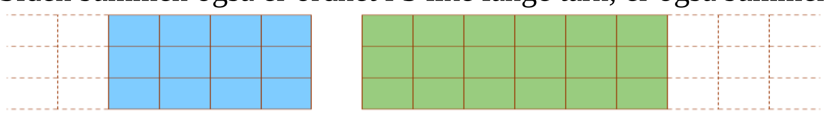
Det vet jeg fordi vi kan se på 48 som 8 · 6. Det blir 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6. Vi kan dele hver 6-er i to 3-ere. Da blir 48 = 3 + 3 + ... + 3 16 ganger. Da er 48 = 16 · 3 og altså delelig med 3.
Det kan vi gjøre uansett hvilket tall som er delelig med 6. Vi starter med å dele opp hver 6-er i to 3-ere, og ser da at tallet er delelig med 3 også.



Tallet 48 er brukt som et generisk eksempel her.

Hypotese: Hvis vi legger sammen to tall som begge er delelige med 3, så vil også summen være delelig med 3. Et generelt resonnement som viser at hypotesen stemmer kan være:

Et tall som er delelig med 3 kan tenkes som et antall kvadrat som ligger inntil hverandre i 3 like lange rader. Et annet tall som er delelig med 3 kan ordnes på samme måte. Vi ser at vi kan legge sammen en rad fra det første tallet med en rad fra det andre tallet. Da får vi igjen 3 like lange rader, og antall kvadrater er summen av de to tallene vi startet med. Siden summen også er ordnet i 3 like lange tårn, er også summen delelig med 3.



Den samme hypotese som over kan begrunnes ved et annen generelt resonnement ved bruk av algebraiske symboler og kjennskap til den distributive loven.

Et tall som er delelig med 3 er på formen 3 · et positivt heltall. Hvis vi sier at det første tallet er $3 \cdot a$ og det andre tallet er $3 \cdot b$, er summen $3 \cdot a + 3 \cdot b$. Siden multiplikasjon er distributiv, er summen lik $3 \cdot (a + b)$ og delelig med 3.

En elev foreslår at 99· 11 = 999 fordi "*Når vi ganger et tall med 11, så gjentas tallet som 3 · 11 = 33, 7 · 11 = 77 og 8 · 11 = 88.*"

Hypotesen stemmer for tallen 1-9, men ikke generelt. 99 · 11 er et moteksempel.

Engasjement

handler om å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifull. Videre innebærer det å ha tro på at det er mulig bli kompetent i matematikk og at man lærer ved å streve og ikke gi opp. For å kunne utvikle de andre komponentene av matematisk kompetanse, begrepsmessig forståelse, beregning, resonnering og strategisk tankegang er det nødvendig at man har tro på at matematikk er mulig å forstå, at det ikke er samling av tilfeldige regler som må følges. Motsatt, de andre komponentene vil bidra til utvikling av engasjement. Innen tallforståelse kan engasjement ses som bestående av følgende aspekt:

Ha tro på at innsats fører til læring handler om å se seg selv som en som kan lære matematikk. Utvikling av kompetansen til å gjenkjenne og bruke ulike relasjoner, utvikle varierte strategier i arbeid med tall og aritmetiske operasjoner, utforme og begrunne hypoteser osv. tar tid og krever innsats og konsentrasjon, men det er mulig for alle.

Oppleve det som meningsfullt å søke etter relasjoner i arbeidet med tall handler om at elevene bør få erfare at det å se etter sammenhenger og strukturer gir mening og gjør faget kreativt og skapende. Mønstrer og sammenhenger er selve kjernen i matematikk. Søk etter mønster og sammenheng kan gjøre tilsynelatende kjedelige regnestykker til utgangspunkt for spennende og kreative måte å tenke på og å utfordre seg selv på.

Se det som nyttig å bruke ulike representasjoner i arbeidet med tall. Ulike representasjoner gir innblikk til ulike egenskaper og aspekter ved et tall. Noen ganger kan det passe bedre å representere tallet på en spesiell måte enn en annen måte. Noen ganger representerer vi tallet seks som symbolet "6", andre ganger som $4 + 2$ eller $3 \cdot 2$. I noen tilfeller kan det være lurt å tenke på det som et punkt på tallinja, i andre tilfeller som en mengde på 6 eller som en lengde på 6. En bevissthet om muligheter til representere tall, operasjoner, egenskaper osv. på ulike måter og verdien av å bruke det er viktig for elevers læring.

Se verdien av å utvikle flere fremgangsmåter for samme type problem. Ulike fremgangsmåter og sammenligning av dem gir mulighet til å se et problem fra ulike sider. Det gir også mulighet for å tenke kreativt, velge hensiktsmessige fremgangsmåter og å etablere relasjoner mellom ulike ideer. Elevene bør se på disse elementene som viktige i arbeid med ulike problem knyttet til tall og regneoperasjoner. Som oftest er dette være viktige for matematikklæring enn selve svaret i et gitt problem.

Utvikling av tallforståelse

De fem komponentene – begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tankegang), resonnering og engasjement – og aspektene ved hver av dem er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. De støtter hverandre, og de utvikles samtidig. Utvikling av strategier henger tett sammen med forståelse av relasjoner mellom tall og operasjoner, ulike representasjoner, begrunnelser for strategier og verdsetting av ulike måter å tenke på. Tilsvarende med alle andre aspekter av tallforståelse; de utvikles sammen, forsterkes av hverandre og kan ikke tenkes i en rekkefølge. En oppgave legger gjerne opp til noen aspekter i større grad enn noen andre, og det kan være viktig at læreren også velger hvilke aspekter hun ønsker å fremheve under arbeidet med en gitt oppgave. Men det er viktig at alle de ulike aspektene arbeides med over tid. Elevene får da mulighet til å utvikle en tallforståelse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant både for videre matematikklæring, i deres hverdagsliv og seinere i deres profesjonelle karriere.

Bevissthet og metakognisjon er sentrale aspekter ved matematikklæring generelt, og også i utvikling av tallforståelse. Elever som får arbeide med tallforståelse med utgangspunkt i denne forståelsen av trådmodellen vil implisitt utvikle både bevissthet og metakognisjon. Men det er også viktig å diskutere utvikling av kompetansene eksplisitt med elevene. Spesielt vil aspekter ved *engasjement* kunne forsterkes gjennom eksplisitt diskusjon med elevene om hva matematikk handler om og hvordan man lærer matematikk. Verdien av representasjoner og nyttighet av å utvikle flere fremgangsmåter må inngå i denne prosessen. Diskusjoner der man "ser ovenfra" på arbeid med tall og regneoperasjoner og diskuterer hva, hvordan og hvorfor kan bidra til økt motivasjon og bedre prestasjonen i faget.

Referanser

Anghileri, J. (2006) Teaching Number Sense, 2nd edn. London: Continuum.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The Array Representation and Primary Children´s Understanding and Reasoning in Multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217-241.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth: N.H., Heinemann

Case, R. (1998, April). A psychological model of number sense and its development. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To Teach or Not to Teach Algorithms. *Journal of Mathematical Behavoir, 16*(1), 51-61.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New York: Routledge 3.utg.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. og Reys, R. (1992). A proposed framework for examining number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 25-31.

Parrish, S. (2010). *Number talks. Helping children build mental math and computation strategies*. Scholastic Inc.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathmetics Education, 33*(1), 5-29.

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). *Connecting Arithmetic to Algebra.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Saxe, B. G., Diakow, R., & Gearhart, M. (2013). Towards curricular coherence in integers and fractions: a study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *ZDM Mathematics Education, 45*, 343-364.

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (red.), *Teaching and Learning Proofs across the grades* (s. 71-86). New York: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. I D. A. Grouwes (red.) *Handbook of Research on Mathrematics Teaching and Learning*. New York: Macmillian. s.334-370.

Setler, C., Prediger, S., Nuhrenborger, M., & Husmann, S. (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational studies in Mathematics, 79*, 389-408.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). *Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving*. Journal of Mathematics Teacher Education, 11, 307-332

Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM Mathematics Education, 46*, 45-58.

Wagner, D., & Davis, B. (2010). Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics, 74*, 39-51.