

Vurdering av matematisk problemløsning

En studie av sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk og oppgavene som gis på eksamen

Lene Grøterud Leer

Master i lærerutdanning med realfag

Oppgaven levert: Juni 2009

Hovedveileder: Tine Wedege-Mathiassen, MATH

Biveileder(e): Kjersti Wæge, PLU

Kapittel 3 TEORI

Over store deler av verden har det vært et stort fokus på problemløsning i skolen fra 1980-årene og utover (Alseth, et al., 2003). Ifølge Alseth m. fl. (2003) er fokuset en konkretisering av de ulike landenes syn på utdanning og oppdragelse. Samfunnet har behov for mennesker som kan løse problemer og håndtere ukjente situasjoner, og det blir da et fokusområde i skolen. Frank K. Lester (1994) poengterer at selv om det er en generell aksept blant matematikkutdannere om at problemløsning bør ha en viktig rolle i læreplanen i matematikk, er det ikke enighet om hvordan det skal gjøres. Han hevder videre at ingen læreplaner i matematikk har klart å gjøre problemløsning til et sentralt fokus.

I teorikapittelet skal jeg presentere ulike definisjoner av begrepene problem og problemløsning, før jeg ser nærmere på problemløsningsprosessen. Begrepene problem og problemløsning har hatt og har fortsatt ulike betydninger (Barkatsas & Hunting, 1995; Schoenfeld, 1992), og jeg mener det er viktig å avklare hva jeg mener med de to begrepene. Deretter skal jeg ta for meg to ulike beskrivelser av matematisk kompetanse. Kompetanse er et begrep som har vist seg å være egnet til å beskrive de ulike faglige og menneskelige kravene som stilles til den enkelte i dagens samfunn (Jørgensen, 2001). I begge beskrivelsene jeg presenterer blir problemløsning sett på som en del av den matematiske kompetansen. Så følger en grundig presentasjon av kreativ og imiterende resonnering, som ble nevnt kort i innledningen til masteroppgaven. Teorien fungerer som et teoretisk rammeverk for analysen jeg skal gjøre av eksamensoppgaver. Jeg presenterer videre KappAbel, en matematikkonkurranse jeg mener bidrar til at problemløsning får en plass i norske klasserom. Deretter tar jeg for meg ulike mål for matematikkundervisning, før jeg går nærmere inn på utvikling av læreplaner og læreplanens ulike nivåer. Læreplanteorien fungerer som bakgrunn for presentasjonen av læreplanverkene M87 og L97, og deres fokus på problemløsning. Til slutt tar jeg for meg vurdering i skolen med fokus på hvordan den påvirker undervisningens praksis.

3.1 PROBLEMLØSNING

Begrepene problem og problemløsning har hatt og har fortsatt ulike, og i noen tilfeller motstridende, betydninger (Barkatsas & Hunting, 1995; Lithner, 2005; Schoenfeld, 1992). To eksempler på ulike beskrivelser av et problem finner jeg i ”*Oxford advanced learner's dictionary of current English*” av Albert Sidney Hornby (2005):

1. A thing that is difficult to deal with or to understand
2. A question that can be answered by using logical thought or mathematics (Hornby, 2005, s. 1202)

Ulike betydninger av begrepene gjør at mye av litteraturen på området er vanskelig å tolke (Schoenfeld, 1992). Alan H. Schoenfeld (1983, 1992) registrerte følgende mål for kurs som ble identifisert som problemløsningskurs i en studie av høyskoler (colleges) i USA og Canada i 1983:

- to train students to ”think creatively” and/or “develop their problem-solving ability”;
- to prepare students for problem competitions such as the Putnam examinations or national or international Olympiads;
- to provide potential teachers with instruction in a narrow band of heuristic strategies;
- to learn standard techniques in particular domains, most frequently in mathematical modeling;
- to provide a new approach to remedial mathematics (basic skills) or to try to introduce “critical thinking” or “analytical reasoning” skills (Schoenfeld, 1992, s. 337).

Målene spenner fra problemløsning som metode for å lære spesielle teknikker og utvikle regneferdigheter til å utvikle kreativ og kritisk tenkning, og jeg mener at de illustrerer godt de ulike betydningene som ligger i begrepet.

Begrepet problemløsning har gjennom tidene blitt brukt på ulike måter, fra arbeid med rutineoppgaver til å gjøre matematikk som en profesjonell (Lithner, 2005; Schoenfeld, 1992). Ifølge Felicia C. Goldstein og Harvey S. Levin (1987) er problemløsning den mest komplekse av alle intellektuelle funksjoner. Et problem oppstår hvis en person ikke har en metode for å oppnå et ønsket mål. Problemløsning krever motivasjon, oppmerksomhet og evne til å hindre impulsive tendenser. I tillegg må problemløseren

ha evnen til å organisere, kategorisere og vurdere innsats, både underveis og etter prosessen.

3.1.1 Hva er et problem og problemløsning?

Tradisjonelt har problemer, i matematikkundervisningen i skolen, blitt identifisert som matematiske oppgaver som skal utføres. Oppgaver som har til hensikt å gi trening i en bestemt løsningsteknikk, ofte kalt *rutineoppgaver*, har dermed også blitt regnet som problemer (Antonius, 2003; Björkqvist, 2003; Jensen, 2007; Schoenfeld, 1992). I tillegg har det ofte vært forutsatt at et problem er en tekstopp-gave, noe som har ført til at de to begrepene har blitt brukt synonymt (Björkqvist, 2003). I matematikdidaktisk forskning er imidlertid oppfattelsen av hva som er et problem en annen (Antonius, 2003). Jeg kommer nå først til å presentere ulike synspunkter på problemer og problemløsning, deretter skal jeg sammenligne de med hverandre. Alle definisjonene som blir presentert har forholdet mellom problem og problemløser i fokus, og blant matematikdidaktikere er det en generell enighet om at det er relasjonen som er viktig, ikke egenskapene til et problem alene (Geiger & Galbraith, 1998; Lester, 1994).

George Polya (2004) ser på problemløsning som en praktisk ferdighet (skill), på samme måte som svømming, og han hevder at slike ferdigheter blir ervervet gjennom imitasjon og praksis. En person som ønsker å lære å løse problemer må observere og imitere hva andre problemløsere gjør, og etter hvert vil han klare å løse problemer på egenhånd. Polya definerer det å ha et *problem* på følgende måte:

to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim (Polya, 1981, s. 117).

Problemløsning betyr å finne en slik handling. Ifølge Polya er det slik at et ønske om å oppnå et mål i noen tilfeller fører til et problem, og i andre tilfeller ikke gjør det. Det er ikke et problem dersom problemløseren med en gang ser for seg en handling som sannsynligvis fører til målet (Polya, 1981).

Schoenfeld (1993) har to kriterier som definerer hva som er et *matematisk problem* for en elev. Kriteriene er som følger:

For any student, a mathematical problem is a task

- a. in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution, and
- b. for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution (Schoenfeld, 1993, s. 71).

Ifølge Schoenfeld (1993) er en oppgave først et problem for en elev når eleven har gjort den til sitt problem. Det medfører at ingen oppgaver er universelle problemer, altså problemer for alle elever. Et problem er en oppgave som er vanskelig for eleven å løse. Vanskeligheten skal imidlertid ikke være regneteknisk, men intellektuell (Schoenfeld, 1985). Et eksempel finner jeg innen algebra, inspirert av Schoenfeld (1985). For meg, og de fleste andre matematikere, vil inverteringen av en stor matrise, for eksempel 30 x 30-matrise være en vanskelig oppgave. Jeg vil høyst sannsynlig gjøre regnefeil underveis, og det er liten sannsynlighet for at den første resulterende matrisen vil være riktig. Allikevel er ikke inverteringen av en gitt matrise et problem for meg siden jeg har en lett tilgjengelig metode for å finne den inverse matrisen. En oppgave som ikke tilfredsstillende definerer et matematisk problem kaller Schoenfeld *øvelse* (exercise) (Schoenfeld, 1985, 1992, 1993). Han hevder at de fleste oppgavene i elevers matematikkbøker er øvelser som elevene kan løse ved å bruke prosedyrer som blir presentert i tilhørende kapittel (Schoenfeld, 1993).

I dag er det, ifølge Ole Björkqvist (2003), vanlig å definere et matematisk problem så nært ordet "problem" i hverdagspråket som mulig. Han definerer et *problem* som en matematisk oppgave som skal utføres, hvor problemløseren ikke har en klar løsningsmetode i den innledende fasen. En oppgave som for en person er et problem, behøver ikke å være det for en annen. Björkqvist fremhever også viktigheten av at eleven opplever problemet som sitt eget. Bakgrunnen for påstanden er at han mener det vil garantere en viss utgangsmotivasjon og sørge for at oppgaven blir satt i forbindelse med tidligere erfaringer. Å arbeide med en egen oppgave ligner også arbeidet til den viderekommende matematikeren. Han presenterer videre et mulig tillegg til sin egen definisjon om at en oppgave først er et problem når eleven opplever den som sin egen. Tillegget er hentet fra John Mason og Joy Davis (1991, s. 4) som hevder at et problem er noe som "gets inside you; it nags and 'wants' to be resolved". Min vurdering er at

Björkqvist er noe utydelig på om han faktisk tar med tillegget i sin egen definisjon, noe følgende sitat illustrerer:

Fra flere synsvinkler ser det altså ut til å være ønskelig at problemer oppleves som elevenes/problemløsernes egne, og som Mason og Davis (1991, s. 4) kan man ta dette med i definisjonen, slik at en oppgave er et problem først når den oppleves som egen (og at man ikke vet hvordan man skal gå fram) (Björkqvist, 2003, s. 55).

Björkqvist skriver man kan ta med tillegget, men ikke om han faktisk gjør det. I sammenligningen av definisjonene velger jeg derfor å ta for meg Björkqvist sin definisjon både med og uten tillegget. Slik jeg tolker Björkqvist (2003), blander han mellom problem og problemløsning når han definerer et problem. Han skriver at ”det i den innledende fasen skal være uklart for problemløseren hvilken løsningsmetode som kan brukes” (Björkqvist, 2003, s. 54). Min tolkning er at ”den innledende fasen” betyr begynnelsen av prosessen med å løse problemet, og en konsekvens av det blir at en elev er nødt til å begynne å løse oppgaven for at vi, som forskere, skal kunne definere den som et problem.

Videre mener jeg at Björkqvist (2003) sin begrunnelse for hvorfor det er viktig at eleven opplever problemet som sitt eget også er noe problematisk. Årsaken er at han igjen trekker inn aspekter som angår løsningen av et problem, og ikke problemet alene. Björkqvist skriver at ”Å jobbe med en egen oppgave er i og for seg også noe som ligner arbeidet til den viderekomne matematikeren” (Björkqvist, 2003, s. 55). Begrunnelsen er knyttet til begrepet problemløsning, og ikke til definisjonen av et problem. Björkqvist (2003) definerer ikke hva han mener med problemløsning.

Jensen (2007) definerer et *problem* som:

en situation der involverer en række metodeåbne spørgsmål der udfordrer en eller anden intellektuelt som ikke umiddelbart er i besiddelse af direkte metoder/procedyrer/algoritmer der er tilstrækkelig til at besvare spørgsmålene (Jensen, 2007, s. 120).

Han bruker termen ”situation” i definisjonen fordi hans sentrale begrep er *kompetanse*, en betegnelse han bruker om ”nogens innsigtsfulde parathed til at handle på en måte,

der lever op til utfordringerne i en given situation” (Jensen, 2007, s. 123). Jensen (2007) skiller mellom oppgave, øvelse og problem. Ifølge Jensen har en *oppgave* en objektiv karakter. Med objektiv mener han at om det er snakk om en oppgave eller ikke, er uavhengig av sender eller mottaker. Begrepene øvelse og problem har i stedet en subjektiv karakter. Dersom det eksisterer et problem eller en øvelse, må det også eksistere en person som det er et problem eller en øvelse for. En oppgave er et problem dersom løsningen av oppgaven fører til et problem for mottakeren. Dersom det er sannsynlig at oppgaven ikke er eller vil føre til et problem for mottakeren, er oppgaven en *øvelse*. En oppgave kan dermed enten være et problem eller en øvelse. Alle personer kan bli stilt overfor en oppgave, men det er vanskelig å vite hvem oppgaven vil være et problem for. Et eksempel er løsning av en annengradsligning. En slik oppgave vil være en øvelse for en person som kjenner og kan bruke formelen for løsning av annengradsligninger, og et problem for en person som ikke gjør det. Jensen (2007) definerer problemløsning som prosessen hvor man forsøker å løse et problem.

Jeg kan ikke benytte definisjonen til Jensen (2007) i min studie. Årsaken er at han definerer et problem som noe som er knyttet til en bestemt person (den subjektive karakteren til et problem). Studien min tar for seg en gruppe elever, og ikke enkeltelever. Analysen baserer seg på lærebøker, og at alle elevene som har brukt de aktuelle lærebøkene har noe til felles, for eksempel kjennskap til teori, svar og algoritmer.

Boesen (2006) benytter følgende definisjon av et *problem*:

a task in which he or she doesn't know how to proceed and no complete known solution procedure can be used (Boesen, 2006, s. 31).

For å løse et problem, må eleven konstruere noe nytt og bruke eksisterende kunnskap i en ny situasjon. Om en oppgave er et problem er avhengig av eleven og oppgaven. En oppgave kan være et problem for en elev, men ikke for en annen. *Problemløsning* er løsning av et problem. Boesen (2006) hevder han er inspirert av tankegangen til Schoenfeld som ble presentert tidligere i kapittelet. Jeg kan delvis si meg enig i det. I likhet med Schoenfeld hevder Boesen at en oppgave ikke er et problem dersom eleven

har en kjent metode for å løse problemet. Schoenfeld trekker imidlertid inn affektive faktorer som en del av definisjonen, noe Boesen ikke gjør. Ifølge Schoenfeld må eleven være interessert, engasjert og ha et ønske om å løse oppgaven for at det skal være mulig å kalle den et problem.

Min vurdering er at de ulike definisjonene av et problem og problemløsning som er presentert her er svært like. Alle hevder at et problem er et relativt begrep som avhenger av forholdet mellom oppgaven og personen som skal løse den. Et problem er dermed individrelatert. Min vurdering er at Jensen og Boesen kun trekker inn relasjonen mellom problem og problemløser i sine definisjoner. Hvis en person ikke har en kjent løsningsmetode for å løse en oppgave, så er oppgaven et problem for personen. Både Polya og Schoenfeld trekker i tillegg inn problemløserens ønske om å finne en løsning i sine definisjoner. En oppgave er ikke et problem før problemløseren har gjort den til sitt problem, altså har et problem en affektiv dimensjon. Schoenfeld trekker i tillegg inn elevens interesse og engasjement som er flere affektive faktorer. Slik jeg vurderer det, ligner Björkqvist sin definisjon uten tillegg mest på Jensen og Boesen sine definisjoner fordi den kun tar med det individrelaterte aspektet med ukjent løsningsmetode.

Definisjonen til Björkqvist med tillegget om at problemløseren skal oppleve problemet som sitt eget, er mest lik Polya og Schoenfeld sine definisjoner siden den trekker inn den affektive dimensjonen om at problemløseren skal oppleve problemet som sitt eget.

Jeg velger å benytte Boesen (2006) sin definisjon av et problem i masteroppgaven. Det betyr at et *problem* er en oppgave hvor problemløseren ikke vet hvordan han skal komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes.

Problemløsning definerer jeg, i liket med Boesen (2006), som løsning av et problem. Årsaken er at jeg skal benytte hans analyseverktøy, som er basert på definisjonene, i studien min. Dersom jeg hadde hatt tilgang på et analyseverktøy som også tok hensyn til den affektive dimensjonen av et problem, ville jeg imidlertid benyttet det. Årsaken er at forskning indikerer at den affektive dimensjonen er viktig når en person skal løse et problem (Barkatsas & Hunting, 1995; Carlson & Bloom, 2005; DeBellis & Goldin, 1997; Lester, Garofalo, & Lambdin Kroll, 1989; Mcleod, 1989, 1992; Philippou & Christou, 1998; Schoenfeld, 1989). Jeg kommer nærmere tilbake til hvordan jeg ville

gjort det i kapittel 6. Der tar jeg også for meg begrensningene i studien, som følge av valgt definisjon.

3.1.2 Problemløsningsprosessen

Polya (1981, 2004) og Schoenfeld (1983, 1985, 1992, 1993, 1994, 2007) har vært spesielt sentrale innenfor forskning på matematisk problemløsning. Her presenterer jeg Polya og Schoenfeld sin beskrivelse av problemløsningsprosessen, i tillegg til en nyere beskrivelse konstruert av Marilyn P. Carlson og Irene Bloom (2005). Deretter sammenligner jeg de tre beskrivelsene. Jeg gjør oppmerksom på at beskrivelsen til Polya ikke er basert på forskning, noe Schoenfeld og Carlson og Bloom sin er. Polya gav i 1945 ut den første utgaven av ”*How to solve it*”, som har blitt en av verdens mest suksessrike matematikkbøker. Boka har solgt i over en million eksemplarer og blitt oversatt til sytten språk (Polya, 2004). Mesteparten av arbeidet som ble gjort innenfor problemløsning på 1970- og 1980-tallet er basert på Polyas arbeid (Schoenfeld, 1992).

I ”*How to solve it*” presenterer Polya en rekke spørsmål som kan være svært nyttige når man skal løse problemer. Han deler problemløsningsprosessen inn i fire faser, og til hver fase introduserer han bestemte strategiske spørsmål som kan hjelpe problemløseren på vei mot løsningen (Polya, 2004). De fire fasene er som følger:

1. Forstå problemet
2. Lage en plan
3. Gjennomføre planen
4. Se tilbake

Første fase er å forstå problemet. Dersom en elev skal løse et problem, er det en forutsetning at han forstår problemet. Ifølge Polya (2004) må eleven i tillegg ha et ønske om å finne løsningen. I undervisningssammenheng fører det til at læreren må velge ut problemer som har en passende vanskelighetsgrad og er interessante for eleven. Veien fra å forstå problemet til å lage en plan for å finne løsningen kan være lang. Noen ganger kommer eleven fram til en plan litt etter litt og andre ganger kommer den som et lyn fra klar himmel. Eleven har en plan når han vet hvilke beregninger og/eller konstruksjoner han må gjøre for å løse problemet. Gode ideer til en plan er basert på

tidligere erfaringer og kunnskap. Å gjennomføre planen er mye enklere enn å lage den. Eleven må imidlertid sjekke hvert trinn i løsningsprosessen og være overbevist om at de er riktige. Siste trinn er å se tilbake på den fullstendige løsningen. Eleven bør undersøke og vurdere både resultatet og løsningsmetoden. Kan han løse oppgaven på en annen måte? Kan resultatet eller løsningsmetoden løse andre problemer? (Polya, 2004).

Slik jeg tolker Polya (1981, 2004), er ikke de fire fasene i problemløsningsprosessen en stringent metode. De fire fasene er heller en veiledende inndeling som skal hjelpe problemløseren med å finne passende strategiske spørsmål blant de mange spørsmålene som Polya presenterer. Fasene skal også hjelpe problemløseren med å tenke framover. Hva er målet? Hva ønsker problemløseren å oppnå/finne ut? Jeg tolker det slik at prosessen er delvis lineær. Med det mener jeg at de fire fasene følger logisk etter hverandre, men at problemløseren har mulighet til, og ifølge Polya bør, gå tilbake til tidligere faser når han kommer til ”Se tilbake”.

Schoenfeld (1992, 1993, 2007) deler problemløsningsprosessen inn i seks faser: 1) lese, 2) analysere, 3) utforske, 4) planlegge, 5) implementere og 6) sjekke. Han studerte en matematiker og 100 videoer av elever i den videregående skolen mens de løste problemer. Resultatene viser at den erfarne matematikeren bruker mer enn halvparten av tiden på å forstå problemet. I stedet for å følge den første ideen han får, benytter han av den tildelte tiden (20 minutter) på analysering og strukturert utforskning. Han begynner ikke med ustrukturert utforskning og implementering før han er overbevist om at han arbeider i riktig retning. Derimot følger elevene ofte følgende strategi:

Read, make a decision quickly, and pursue that direction come hell or high water.
(Schoenfeld, 1992, s. 356)

Elevene leser problemet, velger en retning for arbeidet og fortsetter i den retningen resten av den tildelte tiden (20 minutter), til tross for at de ikke gjør fremgang. Resultatene fra Schoenfeld viser at mer enn 60 % av elevene forsøker å løse et problem på den nevnte måten (Schoenfeld, 1992, 1993). Elevene har kunnskapene de trenger for å løse problemet, men de klarer allikevel ikke å løse problemet. Ifølge Schoenfeld (2007) er årsaken at elevene ikke har effektive mekanismer for å reflektere over og

gjøre om valgene de gjorde i begynnelsen av problemløsningsprosessen. Når elevene mangler evnen til å revurdere og reversere, vil valg av feil strategi garantere at elevene ikke finner en løsning (Schoenfeld, 1992). Elevene er ikke klar over, eller klarer ikke å benytte, de metakognitive ferdighetene som matematikeren behersker (Schoenfeld, 1993).

En nyere inndeling av problemløsningsprosessen er utarbeidet av Carlson og Bloom (2005). De studerte tolv matematikere⁵ mens de løste matematiske problemer, og resultatene indikerer at problemløsning består av fire hovedfaser: 1) orientere, 2) planlegge, 3) utføre og 4) sjekke. Etter at matematikerne hadde orientert seg om hva problemet handlet om, ble en planlegge-utføre-sjekke-syklus repetert gjennom hele problemløsningsprosessen. Det var sjelden at noen av oppgavene ble løst på en lineær måte (fase 1-4 uten repetisjoner). Matematikerne reflekterte jevnlig over egne valg og handlinger gjennom alle de fire fasene, og refleksjonene så stort sett ut til å bevege matematikernes tenkning i en produktiv retning (Carlson & Bloom, 2005).

Min vurdering er at de tre beskrivelsene er nokså like. Til tross for at inndelingen og navngivingen er forskjellig, er innholdet stort sett det samme. Jeg mener at Polya sin inndeling ligner mye på Carlson og Bloom sin. De deler inn problemløsningsprosessen i like mange faser med tilsvarende fokus i hver fase. Slik jeg vurderer det, er Carlson og Bloom tydeligere på at enkelte faser gjentas (planlegge-utføre-sjekke-syklusen), og jeg mener det gir et riktigere helhetsbilde av problemløsningsprosessen. Schoenfeld deler inn problemløsningsprosessen i seks faser. Min vurdering er at de tre første fasene (lese, analysere og utforske) kan omfatte det som ligger i Polyas første trinn, forstå problemet, og Carlson og Blooms første trinn, orientere. Videre er de tre siste fasene til Schoenfeld samsvarende med de tre siste fasene til Polya og Carlson og Bloom, i rekkefølgen som er oppgitt i presentasjonen.

⁵ Åtte forskere og fire doktorgradsstudenter i matematikk fra to store, offentlige universiteter i USA.

VEDLEGG 1: ANALYSESKJEMA

Oppgavenummer:	
A1. Eksamensoppgaven – Svar og løsninger	
A2. Eksamensoppgaven – Andre egenskaper	
1. Oppdrag	
2. Eksplisitt informasjon om situasjonen	
3. Representasjoner	
4. Språklige egenskaper	
5. Eksplisitt formulerte hint	
6. Responsformat	
B1. Lærebøker – Svar og løsninger	
a. Lete etter lignende oppgaver og eksempler som kan bli løst med samme svar eller algoritme som eksamensoppgaven	
b. Lete i teorien i lærebøker for å finne deler som kan inneholde svar eller algoritme, for eksempel regler, teoremer, fakta osv.	
B2. Lærebøker – Andre egenskaper	
a. Gjennomgang av lærebøker for å lete etter oppgaver og eksempler som ligner på eksamensoppgaven med hensyn på oppgavevariablene	
1. Oppdrag	
2. Eksplisitt informasjon om situasjonen	
3. Representasjoner	
4. Språklige egenskaper	
5. Eksplisitt formulerte hint	
6. Responsformat	
b. Lete i teorien i lærebøker etter informasjon som er nært relatert til eksamensoppgaven med hensyn på oppgavevariablene	
1. Oppdrag	
2. Eksplisitt informasjon om situasjonen	
3. Representasjoner	
4. Språklige egenskaper	
5. Eksplisitt formulerte hint	
6. Responsformat	
C. Konklusjon og argumentasjon for en bestemt resonneringstype	
Type resonnering	