NTNU
Det skapende universitet

Vurdering av matematisk problemløsning

En studie av sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk og oppgavene som gis på eksamen

Lene Grøterud Leer

Master i lærerutdanning med realfag
Oppgaven levert: Juni 2009
Hovedveileder: Tine Wedege-Mathiassen, MATH
Biveileder(e): Kjersti Wæge, PLU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

FORORD

Jeg startet på lektorutdanningen på NTNU, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, i 2004. I de fem påfølgende årene har jeg studert fagene matematikk, fysikk, kjemi og biologi. Arbeidet med masteroppgaven i matematikkdidaktikk begynte jeg på i januar 2009. De fem månedene jeg har brukt på masteroppgaven har vært spennende og lærerike, men samtidig krevende. Dokumentet du leser nå er resultatet av arbeidet.

Kjersti Wæge og Tine Wedege har vært veilederne mine på masteroppgaven. Jeg ønsker å takke begge to for gode innspill og konstruktive kommentarer underveis i arbeidet. Og for interessen de to har vist for arbeidet mitt. En spesiell takk til Kjersti som tok tak og hjalp meg med å komme videre når arbeidet stoppet litt opp.

Jeg vil takke Ingebjørg Berglie for alle gode kommentarer og tilbakemeldinger etter hvert som masteroppgaven ble til. Og for at hun har latt meg få utløp for mine frustrasjoner når det var nødvendig. Videre vil jeg takke Susanne Hoffart, Solveig Kvisle, Kari Mjøseng og Arne Mjøseng for at de tok seg tid til å korrekturlese masteroppgaven. Jeg retter også en takk til Arne Amdal for utlån av eksamensoppgaver. Han gjorde at datainnsamlingen min gikk raskt og greit!

Videre vil jeg takke min samboer, Thomas Enoksen, som har vært svært tålmodig og hjelpsom. Jeg har mistet tellingen på antall bøker han har hentet på biblioteket for meg og antall middager han har laget mens jeg var i min egen tankefulle verden foran datamaskinen. Til slutt ønsker jeg å takke moren min for støtte og hjelp underveis i arbeidet, og søsteren min, Nina, for hjelp med å oversette sammendraget til engelsk.

Trondheim, 1. juni - 2009

Lene Grøterud Leer

SAMMENDRAG

Masteroppgaven fokuserer på vurdering av matematisk problemløsning i grunnskolen under det norske læreplanverket, L97. Den overordnende problemstillingen er: *Hvordan er sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk i grunnskolen og oppgavene som blir gitt på eksamen?* Målet med studien er å få innsikt i samsvaret mellom intensjonene i læreplanen og eksamensoppgavene i matematikk.

Utvalget består av tre skriftlige avgangsprøver (eksamener) i matematikk basert på L97. Jeg analyserer og klassifiserer eksamensoppgavene ved å bruke et allerede eksisterende analyseverktøy som skiller mellom *kreativ og imiterende resonnering*. Kreativ resonnering er ny, fleksibel og baserer seg på de grunnleggende, matematiske egenskapene til objektene i oppgavene. Elevene kan ikke bruke kjente løsningsmetoder og svar, men de må produsere noe nytt. Imiterende resonnering kjennetegnes av overfladisk leting etter lignende svar, eksempler og løsningsprosedyrer som elevene kan kopiere eller reprodusere for å løse en gitt oppgave. I studien definerer jeg et *problem* (problemløsningsoppgave) som en oppgave hvor problemløseren ikke vet hvordan han skal komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes. For å kunne løse et problem, må elevene beherske kreativ resonnering.

Jeg undersøker læreplanen i matematikk fra L97 med fokus på problemløsning. Det gjør jeg ved å analysere, tolke og vurdere innholdet i læreplanen slik den ble vedtatt av myndighetene. Til slutt drøfter og diskuterer jeg samsvaret mellom fokuset på problemløsning i læreplanen og på eksamenene.

Resultatene fra studien viser at eksamenene kun inneholder en liten andel problemløsningsoppgaver, til tross for at fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk er stort. Flesteparten av eksamensoppgavene er oppgaver hvor elevene kjenner et svar eller en løsningsprosedyre som løser oppgaven. Analyseverktøyet, som i utgangspunktet er konstruert for å undersøke nasjonale prøver og prøver laget av lærere i den videregående skolen i Sverige, viser seg å fungere godt for å analysere norske eksamener i matematikk.

SUMMARY

The master's thesis focuses on the assessment of mathematical problem solving in primary school during the Norwegian curriculum, L97. The research question is: *How is the connection between the focus on problem solving in the curriculum in mathematics in primary school and the tasks that are given on the exam?* The objective of the study is to gain insight into the connection between the intentions of the curriculum and the exam tasks in mathematics.

The selection consists of three final exam papers in mathematics based on L97. I analyze and classify the exam tasks by using an existing analytical tool that distinguishes between *creative and imitative reasoning*. Creative reasoning is new, flexible and is based on the basic mathematical properties of the objects involved in the tasks. The pupils cannot use well-known solution methods and answers, but they must produce something new. Imitative reasoning is characterized by a superficial search for similar answers, examples and solution procedures that the pupils can copy or reproduce in order to solve a given task. In the study I define a *problem* (problem solving task) as a task where the problem solver does not know to proceed in the solution process, and no known solution method can be used. In order to solve a problem, the pupils must master creative reasoning.

I examine the curriculum in mathematics from L97 with a focus on problem solving. I do this by analyzing, interpreting and evaluate the content of the curriculum as the authorities adopted it. Finally, I discuss the consistency between the focus on problem solving in the curriculum and on the exams.

The results of the study shows that the exams contains only a small proportion of problem solving tasks, despite the fact that the focus on problem solving in the curriculum in mathematics is great. Most of the exam tasks are tasks where the pupils know an answer or a solving procedure that completely solves the task. The tool of analyzing, which intentionally was constructed to examine national tests and tests made by teachers in upper secondary school in Sweden, appears to work well for analyzing Norwegian exams in mathematics.

INNHOLDSFORTEGNELSE

VEDLEGG

Kapittel 1 INNLEDNING

Jeg har alltid hatt en interesse for matematisk problemløsning. Forskjellige problemer, grubleoppgaver og mystiske sammenhenger har opptatt meg i timevis, og noen ganger dagevis, helt siden jeg begynte på skolen. Og jeg gir sjelden opp når jeg har begynt. Følelsen av å løse et problem som jeg har strevet lenge med er for god til å gi avkall på, nesten som en lykkerus. Interessen for problemløsning hadde mye å si for mitt valg av utdanning. Jeg ville lære mer om den spennende, og i noen tilfeller litt mystiske, matematiske verdenen. Valget mitt falt på lektorutdanning i realfag på NTNU, en utdanning som har gitt meg i pose og sekk.

I mine to praksisperioder i lektorutdanningen var jeg utplassert på mellom- og ungdomstrinnet i grunnskolen. De to praksisperiodene ble svært forskjellige for min del. Den ene perioden var på en skole preget av svært tradisjonell undervisning, ofte kalt lærebok- og oppgavestyrt undervisning (Alseth, Breiteig, & Brekke, 2003; Wæge, 2007). Jeg gjorde noen spede forsøk på å gjennomføre utforskende og problembaserte aktiviteter i 10. klassen jeg underviste i matematikk, men det lyktes ikke i noe særlig grad. I samtaler med noen av elevene, kom det frem at de hadde en forståelse av matematikk som et fag der de skulle pugge regler. De forstod ikke vitsen med at de selv skulle finne ut av matematiske sammenhenger når alt de trengte å vite stod i læreboka.

Den andre praksisperioden var helt annerledes. Elevene på skolen jeg ble utplassert på hadde arbeidet mye med problembaserte aktiviteter. De var motiverte for å finne ut av sammenhenger selv, og svært engasjerte når de fikk et problem de skulle forsøke å løse. Møtet med elevene økte interessen min for bruk av problemløsning i undervisningssammenheng. Etter at praksisperioden var over, bestemte jeg meg for at problemløsning var noe jeg ville jobbe mer med i masteroppgaven min.

Et halvt år senere leste jeg doktoravhandlingen til Tomas Højgaard Jensen (2007) om bruk av modellering i matematikkundervisningen i den danske videregående skolen[1]. Matematisk modellering blir sett på som den mest fullstendige formen for matematisk problemløsning (Björkqvist, 2003). Arbeidet til Jensen er en videreføring og oppdatering av masteroppgaven han skrev sammen med Per Gregersen i perioden 1997-1998 (Gregersen & Jensen, 1998). Jensen (2007) kom fram til at eksamen var et hinder for utstrakt bruk av modellering og problemløsning i matematikkundervisningen i Danmark. Årsaken var at eksamen ikke var tilpasset slik undervisning, og dermed ikke laget for å måle i hvilken grad elevene hadde oppnådd modellerings- og problemløsningskompetanse. Resultatet gjorde meg nysgjerrig, og jeg bestemte meg for å finne ut mer om sammenhengen mellom undervisning og oppgavene som gis på eksamen.

Høsten 2008 gjennomførte jeg en forundersøkelse til masteroppgaven. Målet var å finne ut om oppgavene som blir gitt på eksamen påvirker lærernes planlegging av undervisning i matematikk. To erfarne lærere deltok i studien. Resultatene viste at lærerne fokuserer på eksamen når de planlegger undervisningen. Fokuset avhenger av elevgruppen som lærerne underviser og hvor mye kjennskap lærerne har til tidligere eksamensoppgaver.

1.1 TIDLIGERE FORSKNING

Forskning viser at det er en sammenheng mellom vurdering av elever og undervisningspraksisen i skolen (Barnes, Clarke, & Stephens, 2000; Heuvel-Panhuizen & Becker, 2003; Jensen, 2007; Michelsen, 2001; Niss, 1993; Wilson, 2007). Ifølge Jensen (2007) antar forskere at endring av vurderingspraksis kan føre til endring av undervisningspraksis. Følgende ordtak er mye brukt for å illustrere sammenhengen:

> What you test is what you get!

[1] Jeg oversetter det danske ”gymnasiet” til den danske videregående skolen.

Ifølge Jensen (2007) og Linda Dager Wilson (2007) er påvirkningen på undervisningspraksisen høyere, jo større konsekvensene er. For eksempel vil eksamen, som har store konsekvenser for elevene med tanke på videre utdanning og arbeid, ha en stor effekt på undervisningspraksisen. Wilson (2007) har gjennomført en litteraturstudie for å finne ut hvilken påvirkning "prøver hvor utfallet er viktig" (high-stakes tests) har på undervisningspraksisen. *Prøver hvor utfallet er viktig* er definert som standardiserte tester som blir gjennomført under like forhold for alle testdeltakerne og som har viktige konsekvenser for deltakerne. Studien til Wilson (2007) viser at lærere tilpasser undervisningen til vurderingsformen(e).

Matematikkutdanningen har gjennomgått en stor utvikling siden 1970-tallet. Innholdet i læreplaner i matematikk har blitt utvidet. Nye aktiviteter som modellering, tverrfaglig samarbeid, problemorientert kreativitet, utforskning, informasjonsteknologi, filosofi og historie har fått plass i mange læreplaner i matematikk over hele verden (Barnes, et al., 2000; Niss, 1993). Et eksempel er det tidligere læreplanverket for den norske grunnskolen, L97, hvor læreplanen i matematikk la opp til undersøkende og problemløsende aktiviteter for elevene (KUF, 1996a). Antall arbeidsformer og elevaktiviteter i matematikk har også blitt flere. Prosjektarbeid, eksperimentering og gruppearbeid er noen eksempler (Niss, 1993). Utviklingene i læreplanene har imidlertid ikke blitt fulgt opp av en parallell utvikling innenfor vurdering. Resultatet er en økende forskjell mellom intensjonene i læreplanene i matematikk og vurderingsmetodene som eksisterer (Niss, 1993). De eksisterende, tradisjonelle vurderingsformene klarer i liten, eller ingen grad, å evaluere de matematiske kunnskapene og kompetansene man egentlig ønsker at undervisningen skal fremme (Niss & Jensen, 2002). Et eksempel fra nyere forskning finner jeg i den tidligere nevnte avhandlingen til Jensen (2007). Resultatene hans indikerer at eksamen, i sin nåværende form, er et hinder for utstrakt bruk av modellering og problemløsning i undervisningen.

En annen studie som fokuserer på vurdering i skolen finner jeg i doktoravhandlingen til Jesper Boesen (2006). Han undersøker hvilken type resonnering[2] som en elev må

[2] Når jeg heretter skriver resonnering, mener jeg matematisk resonnering.

beherske for å kunne løse oppgaver på nasjonale prøver og på prøver konstruert av lærere i den svenske videregående skolen[3]. Resultatene tyder på at elevene kan løse de fleste oppgavene som er laget av lærere ved å bruke imiterende resonnering. Imiterende resonnering er kjennetegnet av overfladisk leting etter lignende eksempler og løsningsprosedyrer som kan bli kopiert eller reprodusert for å løse en gitt oppgave. Elevene kan løse oppgaven ved å ta i bruk kjente algoritmer og svar, og de trenger ikke å ta hensyn til de grunnleggende egenskapene til matematiske objekter og/eller begreper som inngår i oppgaven. Ifølge Boesen (2006) kan noe av forklaringen være at lærerne bevisst unngår oppgaver som krever kreativ resonnering, fordi de mener at slike oppgaver er for vanskelige for de fleste elevene. Oppgavene på de nasjonale prøvene krever i større grad kreativ resonnering. Kreativ resonnering er ny, fleksibel og baserer seg på de grunnleggende, matematiske egenskapene til objektene i oppgaven. Eleven kan ikke bruke kjente løsningsmetoder og svar, men han må produsere noe nytt (Boesen, 2006). Jeg kommer nærmere inn på begrepene kreativ og imiterende resonnering senere i oppgaven.

1.2 MÅLET MED STUDIEN

Masteroppgaven min har fokus på bruk av problemløsning i vurderingssammenheng. Målet er å få innsikt i om intensjonene i læreplanen blir fulgt opp i den skriftlige matematikkeksamen i grunnskolen. Studien vil kunne bidra til å gi en dypere innsikt i om eksamen følger opp fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk, og på den måten antyde om det er samsvar mellom målene samfunnet har satt for grunnskoleopplæringen og hva eksamen tester elevene i. Bjørnar Alseth, Trygve Breiteig og Gard Brekke (2003) har gjennomført en evaluering av L97 med fokus på matematikk. De hevder at den skriftlige eksamen i matematikk er sterkt styrende på innholdet i norsk matematikkundervisning. Eksamen har en tilbakevirkende effekt på undervisningen. Videre påpeker de at myndighetene har tatt den tilbakevirkende effekten på alvor ved at vurderingen i matematikk skal bedømme prosessen, og ikke kun det endelige svaret. En konsekvens, ifølge Alseth m. fl., er at eksamen er mer i samsvar

[3] Jeg oversetter den svenske ”gymnasieskola” til den svenske videregående skolen.

med arbeidsformene en finner i skolen. Samtidig viser undersøkelsen deres at arbeidsformene i skolematematikken er svært tradisjonelle. Timene er styrt av læreren og oppgavene i lærebøkene (Alseth, et al., 2003).

En analyse av den landsomfattende "Elevundersøkelsen 2007", utført av Inger-Johanne Danielsen, Karl Skaar og Einar M. Skaalvik (2007), støtter opp om at undervisningen i Norge er tradisjonell. Deltakelse i undersøkelsen er obligatorisk for elever på 7. og 10. trinn i grunnskolen og videregående trinn 1 i den videregående skolen. For andre trinn er det frivillig å delta. Resultatene viser at 90 % av elevene svarte at tavleundervisning brukes flere ganger i uken og 78 % av elevene sa at de arbeider individuelt flere ganger i uken. Jeg gjør oppmerksom på at prosentandelene gjelder for alle fag, ikke kun matematikk.

Studien min er relevant for matematikkundervisningen, og ikke minst for myndighetene. Undersøkelsen tar for seg sammenhengen mellom læreplanen i matematikk sitt fokus på problemløsning og oppgavene som gis på eksamen. Ved å undersøke den nevnte sammenhengen, ønsker jeg å sette fokus på om eksamen i matematikk samsvarer med intensjonene i læreplanen i matematikk. Min hypotese er at eksamen ikke gjør det. Resultatene bør være interessante for matematikkundervisningen generelt siden forskning har vist at eksamen er sterkt styrende på undervisningen. Dersom studien min viser at eksamen ikke støtter opp om læreplanen i matematikk, kan det være en faktor som påvirker matematikkundervisningens praksis og mulighetene for å endre den. Resultatene bør være spesielt interessante for myndighetene, som utarbeider læreplanverk med en intensjon om at undervisnings- og vurderingspraksisen skal følge dem.

I studien min undersøker jeg eksamensoppgaver som er basert på læreplanverket for den 10-årige grunnskolen fra 1997 (L97), til tross for at L97 ble erstattet av et nytt læreplanverk, Kunnskapsløftet (LK06), i 2006. Årsaken er at det kun er avholdt en eksamen i matematikk for grunnskolen basert på LK06. I tillegg har problemstillingen vist seg relevant for L97. Ifølge Alseth m. fl. (2003) er den skriftlige eksamen i matematikk sterkt styrende på matematikkundervisningen. Jeg mener at det er en god grunn til å undersøke om eksamen faktisk støtter opp om læreplanens intensjoner. Hvis ikke, kan eksamen være en faktor som hindrer at intensjonene i læreplanen følges opp i matematikkundervisningen.

Dersom analyseverktøyet jeg benytter for å analysere eksamensoppgavene viser seg å fungere godt for L97, er det grunn til å tro at det er mulig å benytte det for å analysere eksamensoppgaver gitt under Kunnskapsløftet. Årsaken er at analyseverktøyet kun baserer seg på lærebøker, og eksamensoppgavene kan da analyseres ved å bruke eksamensoppgaver og lærebøker fra LK06. Jeg gir en grundig presentasjon av analyseverktøyet senere i oppgaven.

1.3 KAPITTELOPPBYGNING

I kapittel 2 presenterer jeg problemstillingen og forskningsspørsmålene i studien.

Kapittel 3 omhandler teorier og forskning om problemløsning, læreplaner og vurdering. I tillegg redegjør jeg for valg av definisjoner og begreper som er sentrale i forhold til studiens teoretiske ramme. Undersøkelsen av L97 er også plassert her.

Kapittel 4 tar for seg metodologien. Jeg presenterer først skolesystemet i Norge med fokus på vurdering. Deretter redegjør jeg for utvalget som ble gjort i studien. Til slutt presenterer jeg analyseprosedyren og gir eksempler på ulike klassifiseringer.

Kapittel 5 inneholder resultatene fra analysen av eksamensoppgavene. Jeg gir også grundige eksempler på hvordan jeg analyserte og klassifiserte ulike eksamensoppgaver fra hvert eksamenssett.

I kapittel 6 diskuterer jeg resultatene og analysene i studien. Videre ser jeg resultatene i forhold til forskningsspørsmålene og problemstillingen min.

I kapittel 7 ser jeg fremover mot Kunnskapsløftet. I tillegg kommer jeg med forslag til nye forskningsspørsmål.

Kapittel 2 PROBLEMSTILLING OG FORSKNINGSSPØRSMÅL

Med utgangspunkt i den presenterte bakgrunnen har jeg kommet fram til følgende problemstilling: *Hvordan er sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk i grunnskolen og oppgavene som blir gitt på eksamen?* Med eksamen mener jeg avgangsprøvene som blir avholdt i slutten av 10. trinn, nærmere bestemt mai måned, under læreplanverket for den 10-årige grunnskolen fra 1997 (KUF, 1996a). Avgangsprøven er den eneste skriftlige, sentrale eksamen som elevene har i matematikk i løpet av grunnskolen i Norge. Eksamen har som mål å vurdere elevenes måloppnåelse i forhold til læreplanmålene i læreplanverket.

For å undersøke problemstillingen, har jeg formulert tre forskningsspørsmål:

1. Utfordrer eksamensoppgavene i matematikk elevene til kreativ resonnering?
2. Hvordan er fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk?
3. Er det samsvar mellom eksamensoppgavene og fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk?

Målet med det første spørsmålet er å få svar på om oppgavene som blir gitt på eksamen krever at elevene behersker kreativ resonnering, eller om elevene kan løse de ved å imitere en kjent løsningsprosedyre eller et kjent svar. Problemløsning krever at elevene behersker kreativ resonnering (Boesen, 2006; Palm, Boesen, & Lithner, 2005). Kreativ resonnering er ny, fleksibel, sannsynlig og baserer seg på de grunnleggende, matematiske egenskapene til objektene i oppgaven. Jeg definerer et *problem*[4] som en oppgave hvor problemløseren ikke vet hvordan han skal komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes. *Problemløsning* er å løse en slik oppgave. Elevene kan ikke bruke kjente løsningsmetoder og svar for å løse et problem. De må produsere noe nytt. Altså må de beherske kreativ resonnering. Ifølge Boesen (2006) kan svenske elever, som nevnt, løse de fleste oppgavene på prøver konstruert av lærere ved bruk av imiterende resonnering. Min hypotese er at det samme

[4] Senere i oppgaven drøfter jeg ulike definisjoner av et problem, og begrunner hvorfor jeg var valgt å bruke den gitte definisjonen.

gjelder for norske elever på eksamen, og slike oppgaver er ikke regnet som problemløsningsoppgaver. Det andre spørsmålet fokuserer på problemløsning i læreplanen i matematikk. Jeg ønsker å undersøke hva slags fokus læreplanen i matematikk har på problemløsning. Det er nødvendig for å kunne si noe om intensjonene i læreplanen. Det tredje forskningsspørsmålet tar for seg sammenhengen mellom eksamen og læreplanen i matematikk. Med bakgrunn i tidligere forskning på sammenhengen mellom undervisning og vurdering, mener jeg at eksamensoppgavene bør gjenspeile læreplanens fokus på problemløsning i matematikk. Dersom fokuset på problemløsning er sterkt i læreplanen, bør oppgavene som elevene får på eksamen støtte opp om det.

Kapittel 3 TEORI

Over store deler av verden har det vært et stort fokus på problemløsning i skolen fra 1980-årene og utover (Alseth, et al., 2003). Ifølge Alseth m. fl. (2003) er fokuset en konkretisering av de ulike landenes syn på utdanning og oppdragelse. Samfunnet har behov for mennesker som kan løse problemer og håndtere ukjente situasjoner, og det blir da et fokusområde i skolen. Frank K. Lester (1994) poengterer at selv om det er en generell aksept blant matematikkutdannere om at problemløsning bør ha en viktig rolle i læreplanen i matematikk, er det ikke enighet om hvordan det skal gjøres. Han hevder videre at ingen læreplaner i matematikk har klart å gjøre problemløsning til et sentralt fokus.

I teorikapittelet skal jeg presentere ulike definisjoner av begrepene problem og problemløsning, før jeg ser nærmere på problemløsningsprosessen. Begrepene problem og problemløsning har hatt og har fortsatt ulike betydninger (Barkatsas & Hunting, 1995; Schoenfeld, 1992), og jeg mener det er viktig å avklare hva jeg mener med de to begrepene. Deretter skal jeg ta for meg to ulike beskrivelser av matematisk kompetanse. Kompetanse er et begrep som har vist seg å være egnet til å beskrive de ulike faglige og menneskelige kravene som stilles til den enkelte i dagens samfunn (Jørgensen, 2001). I begge beskrivelsene jeg presenterer blir problemløsning sett på som en del av den matematiske kompetansen. Så følger en grundig presentasjon av kreativ og imiterende resonnering, som ble nevnt kort i innledningen til masteroppgaven. Teorien fungerer som et teoretisk rammeverk for analysen jeg skal gjøre av eksamensoppgaver. Jeg presenterer videre KappAbel, en matematikkonkurranse jeg mener bidrar til at problemløsning får en plass i norske klasserom. Deretter tar jeg for meg ulike mål for matematikkundervisning, før jeg går nærmere inn på utvikling av læreplaner og læreplanens ulike nivåer. Læreplanteorien fungerer som bakgrunn for presentasjonen av læreplanverkene M87 og L97, og deres fokus på problemløsning. Til slutt tar jeg for meg vurdering i skolen med fokus på hvordan den påvirker undervisningens praksis.

3.1 PROBLEMLØSNING

Begrepene problem og problemløsning har hatt og har fortsatt ulike, og i noen tilfeller motstridende, betydninger (Barkatsas & Hunting, 1995; Lithner, 2005; Schoenfeld, 1992). To eksempler på ulike beskrivelser av et problem finner jeg i "*Oxford advanced learner's dictionary of current English*" av Albert Sidney Hornby (2005):

1. A thing that is difficult to deal with or to understand
2. A question that can be answered by using logical thought or mathematics (Hornby, 2005, s. 1202)

Ulike betydninger av begrepene gjør at mye av litteraturen på området er vanskelig å tolke (Schoenfeld, 1992). Alan H. Schoenfeld (1983, 1992) registrerte følgende mål for kurs som ble identifisert som problemløsningskurs i en studie av høgskoler (colleges) i USA og Canada i 1983:

- to train students to "think creatively" and/or "develop their problem-solving ability";
- to prepare students for problem competitions such as the Putnam examinations or national or international Olympiads;
- to provide potential teachers with instruction in a narrow band of heuristic strategies;
- to learn standard techniques in particular domains, most frequently in mathematical modeling;
- to provide a new approach to remedial mathematics (basic skills) or to try to introduce "critical thinking" or "analytical reasoning" skills (Schoenfeld, 1992, s. 337).

Målene spenner fra problemløsning som metode for å lære spesielle teknikker og utvikle regneferdigheter til å utvikle kreativ og kritisk tenkning, og jeg mener at de illustrerer godt de ulike betydningene som ligger i begrepet.

Begrepet problemløsning har gjennom tidene blitt brukt på ulike måter, fra arbeid med rutineoppgaver til å gjøre matematikk som en profesjonell (Lithner, 2005; Schoenfeld, 1992). Ifølge Felicia C. Goldstein og Harvey S. Levin (1987) er problemløsning den mest komplekse av alle intellektuelle funksjoner. Et problem oppstår hvis en person ikke har en metode for å oppnå et ønsket mål. Problemløsning krever motivasjon, oppmerksomhet og evne til å hindre impulsive tendenser. I tillegg må problemløseren ha evnen til å organisere, kategorisere og vurdere innsats, både underveis og etter prosessen.

3.1.1 Hva er et problem og problemløsning?

Tradisjonelt har problemer, i matematikkundervisningen i skolen, blitt identifisert som matematiske oppgaver som skal utføres. Oppgaver som har til hensikt å gi trening i en bestemt løsningsteknikk, ofte kalt *rutineoppgaver*, har dermed også blitt regnet som problemer (Antonius, 2003; Björkqvist, 2003; Jensen, 2007; Schoenfeld, 1992). I tillegg har det ofte vært forutsatt at et problem er en tekstoppgave, noe som har ført til at de to begrepene har blitt brukt synonymt (Björkqvist, 2003). I matematikkdidaktisk forskning er imidlertid oppfattelsen av hva som er et problem en annen (Antonius, 2003). Jeg kommer nå først til å presentere ulike synspunkter på problemer og problemløsning, deretter skal jeg sammenligne de med hverandre. Alle definisjonene som blir presentert har forholdet mellom problem og problemløser i fokus, og blant matematikkdidaktikere er det en generell enighet om at det er relasjonen som er viktig, ikke egenskapene til et problem alene (Geiger & Galbraith, 1998; Lester, 1994).

George Polya (2004) ser på problemløsning som en praktisk ferdighet (skill), på samme måte som svømming, og han hevder at slike ferdigheter blir ervervet gjennom imitasjon og praksis. En person som ønsker å lære å løse problemer må observere og imitere hva andre problemløsere gjør, og etter hvert vil han klare å løse problemer på egenhånd. Polya definerer det å ha et *problem* på følgende måte:

> to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim (Polya, 1981, s. 117).

Problemløsning betyr å finne en slik handling. Ifølge Polya er det slik at et ønske om å oppnå et mål i noen tilfeller fører til et problem, og i andre tilfeller ikke gjør det. Det er ikke et problem dersom problemløseren med en gang ser for seg en handling som sannsynligvis fører til målet (Polya, 1981).

Schoenfeld (1993) har to kriterier som definerer hva som er et *matematisk problem* for en elev. Kriteriene er som følger:

For any student, a mathematical problem is a task

a. in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution, and
b. for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution (Schoenfeld, 1993, s. 71).

Ifølge Schoenfeld (1993) er en oppgave først et problem for en elev når eleven har gjort den til sitt problem. Det medfører at ingen oppgaver er universelle problemer, altså problemer for alle elever. Et problem er en oppgave som er vanskelig for eleven å løse. Vanskeligheten skal imidlertid ikke være regneteknisk, men intellektuell (Schoenfeld, 1985). Et eksempel finner jeg innen algebra, inspirert av Schoenfeld (1985). For meg, og de fleste andre matematikere, vil inverteringen av en stor matrise, for eksempel 30 x 30-matrise være en vanskelig oppgave. Jeg vil høyst sannsynlig gjøre regnefeil underveis, og det er liten sannsynlighet for at den første resulterende matrisen vil være riktig. Allikevel er ikke inverteringen av en gitt matrise et problem for meg siden jeg har en lett tilgjengelig metode for å finne den inverse matrisen. En oppgave som ikke tilfredsstiller definisjonen av et matematisk problem kaller Schoenfeld *øvelse* (exercise) (Schoenfeld, 1985, 1992, 1993). Han hevder at de fleste oppgavene i elevers matematikkbøker er øvelser som elevene kan løse ved å bruke prosedyrer som blir presentert i tilhørende kapittel (Schoenfeld, 1993).

I dag er det, ifølge Ole Björkqvist (2003), vanlig å definere et matematisk problem så nært ordet ”problem” i hverdagsspråket som mulig. Han definerer et *problem* som en matematisk oppgave som skal utføres, hvor problemløseren ikke har en klar løsningsmetode i den innledende fasen. En oppgave som for en person er et problem, behøver ikke å være det for en annen. Björkqvist fremhever også viktigheten av at eleven opplever problemet som sitt eget. Bakgrunnen for påstanden er at han mener det vil garantere en viss utgangsmotivasjon og sørge for at oppgaven blir satt i forbindelse med tidligere erfaringer. Å arbeide med en egen oppgave ligner også arbeidet til den viderekommende matematikeren. Han presenterer videre et mulig tillegg til sin egen definisjon om at en oppgave først er et problem når eleven opplever den som sin egen. Tillegget er hentet fra John Mason og Joy Davis (1991, s. 4) som hevder at et problem er noe som ”gets inside you; it nags and ’wants’ to be resolved”. Min vurdering er at

Björkqvist er noe utydelig på om han faktisk tar med tillegget i sin egen definisjon, noe følgende sitat illustrerer:

> Fra flere synsvinkler ser det altså ut til å være ønskelig at problemer oppleves som elevenes/problemløsernes egne, og som Mason og Davis (1991, s. 4) kan man ta dette med i definisjonen, slik at en oppgave er et problem først når den oppleves som egen (og at man ikke vet hvordan man skal gå fram) (Björkqvist, 2003, s. 55).

Björkqvist skriver man kan ta med tillegget, men ikke om han faktisk gjør det. I sammenligningen av definisjonene velger jeg derfor å ta for meg Björkqvist sin definisjon både med og uten tillegget. Slik jeg tolker Björkqvist (2003), blander han mellom problem og problemløsning når han definerer et problem. Han skriver at ”det i den innledende fasen skal være uklart for problemløseren hvilken løsningsmetode som kan brukes” (Björkqvist, 2003, s. 54). Min tolkning er at ”den innledende fasen” betyr begynnelsen av prosessen med å løse problemet, og en konsekvens av det blir at en elev er nødt til å begynne å løse oppgaven for at vi, som forskere, skal kunne definere den som et problem.

Videre mener jeg at Björkqvist (2003) sin begrunnelse for hvorfor det er viktig at eleven opplever problemet som sitt eget også er noe problematisk. Årsaken er at han igjen trekker inn aspekter som angår løsningen av et problem, og ikke problemet alene. Björkqvist skriver at ”Å jobbe med en egen oppgave er i og for seg også noe som ligner arbeidet til den viderekomne matematikeren” (Björkqvist, 2003, s. 55). Begrunnelsen er knyttet til begrepet problemløsning, og ikke til definisjonen av et problem. Björkqvist (2003) definerer ikke hva han mener med problemløsning.

Jensen (2007) definerer et *problem* som:

> en situation der involverer en række metodeåbne spørgsmål der udfordrer en eller anden intellektuelt som ikke umiddelbart er i besiddelse af direkte metoder/procedyrer/algoritmer der er tilstrækkelig til at besvare spørgsmålene (Jensen, 2007, s. 120).

Han bruker termen ”situation” i definisjonen fordi hans sentrale begrep er *kompetanse*, en betegnelse han bruker om ”nogens indsigtsfulde parathed til at handle på en måde, der lever op til udfordringerne i en given situation" (Jensen, 2007, s. 123). Jensen (2007) skiller mellom oppgave, øvelse og problem. Ifølge Jensen har en *oppgave* en objektiv karakter. Med objektiv mener han at om det er snakk om en oppgave eller ikke, er uavhengig av sender eller mottaker. Begrepene øvelse og problem har i stedet en subjektiv karakter. Dersom det eksisterer et problem eller en øvelse, må det også eksistere en person som det er et problem eller en øvelse for. En oppgave er et problem dersom løsningen av oppgaven fører til et problem for mottakeren. Dersom det er sannsynlig at oppgaven ikke er eller vil føre til et problem for mottakeren, er oppgaven en *øvelse*. En oppgave kan dermed enten være et problem eller en øvelse. Alle personer kan bli stilt overfor en oppgave, men det er vanskelig å vite hvem oppgaven vil være et problem for. Et eksempel er løsning av en annengradsligning. En slik oppgave vil være en øvelse for en person som kjenner og kan bruke formelen for løsning av annengradsligninger, og et problem for en person som ikke gjør det. Jensen (2007) definerer problemløsning som prosessen hvor man forsøker å løse et problem.

Jeg kan ikke benytte definisjonen til Jensen (2007) i min studie. Årsaken er at han definerer et problem som noe som er knyttet til en bestemt person (den subjektive karakteren til et problem). Studien min tar for seg en gruppe elever, og ikke enkeltelever. Analysen baserer seg på lærebøker, og at alle elevene som har brukt de aktuelle lærebøkene har noe til felles, for eksempel kjennskap til teori, svar og algoritmer.

Boesen (2006) benytter følgende definisjon av et *problem*:

> a task in which he or she doesn't know how to proceed and no complete known solution procedure can be used (Boesen, 2006, s. 31).

For å løse et problem, må eleven konstruere noe nytt og bruke eksisterende kunnskap i en ny situasjon. Om en oppgave er et problem er avhengig av eleven og oppgaven. En oppgave kan være et problem for en elev, men ikke for en annen. *Problemløsning* er løsning av et problem. Boesen (2006) hevder han er inspirert av tankegangen til Schoenfeld som ble presentert tidligere i kapittelet. Jeg kan delvis si meg enig i det. I likhet med Schoenfeld hevder Boesen at en oppgave ikke er et problem dersom eleven har en kjent metode for å løse problemet. Schoenfeld trekker imidlertid inn affektive faktorer som en del av definisjonen, noe Boesen ikke gjør. Ifølge Schoenfeld må eleven være interessert, engasjert og ha et ønske om å løse oppgaven for at det skal være mulig å kalle den et problem.

Min vurdering er at de ulike definisjonene av et problem og problemløsning som er presentert her er svært like. Alle hevder at et problem er et relativt begrep som avhenger av forholdet mellom oppgaven og personen som skal løse den. Et problem er dermed individrelatert. Min vurdering er at Jensen og Boesen kun trekker inn relasjonen mellom problem og problemløser i sine definisjoner. Hvis en person ikke har en kjent løsningsmetode for å løse en oppgave, så er oppgaven et problem for personen. Både Polya og Schoenfeld trekker i tillegg inn problemløserens ønske om å finne en løsning i sine definisjoner. En oppgave er ikke et problem før problemløseren har gjort den til sitt problem, altså har et problem en affektiv dimensjon. Schoenfeld trekker i tillegg inn elevens interesse og engasjement som er flere affektive faktorer. Slik jeg vurderer det, ligner Björkqvist sin definisjon uten tillegg mest på Jensen og Boesen sine definisjoner fordi den kun tar med det individrelaterte aspektet med ukjent løsningsmetode. Definisjonen til Björkqvist med tillegget om at problemløseren skal oppleve problemet som sitt eget, er mest lik Polya og Schoenfeld sine definisjoner siden den trekker inn den affektive dimensjonen om at problemløseren skal oppleve problemet som sitt eget.

Jeg velger å benytte Boesen (2006) sin definisjon av et problem i masteroppgaven. Det betyr at et *problem* er en oppgave hvor problemløseren ikke vet hvordan han skal komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes. *Problemløsning* definerer jeg, i liket med Boesen (2006), som løsning av et problem. Årsaken er at jeg skal benytte hans analyseverktøy, som er basert på definisjonene, i studien min. Dersom jeg hadde hatt tilgang på et analyseverktøy som også tok hensyn til den affektive dimensjonen av et problem, ville jeg imidlertid benyttet det. Årsaken er at forskning indikerer at den affektive dimensjonen er viktig når en person skal løse et problem (Barkatsas & Hunting, 1995; Carlson & Bloom, 2005; DeBellis & Goldin, 1997; Lester, Garofalo, & Lambdin Kroll, 1989; Mcleod, 1989, 1992; Philippou & Christou, 1998; Schoenfeld, 1989). Jeg kommer nærmere tilbake til hvordan jeg ville gjort det i kapittel 6. Der tar jeg også for meg begrensningene i studien, som følge av valgt definisjon.

3.1.2 Problemløsningsprosessen

Polya (1981, 2004) og Schoenfeld (1983, 1985, 1992, 1993, 1994, 2007) har vært spesielt sentrale innenfor forskning på matematisk problemløsning. Her presenterer jeg Polya og Schoenfeld sin beskrivelse av problemløsningsprosessen, i tillegg til en nyere beskrivelse konstruert av Marilyn P. Carlson og Irene Bloom (2005). Deretter sammenligner jeg de tre beskrivelsene. Jeg gjør oppmerksom på at beskrivelsen til Polya ikke er basert på forskning, noe Schoenfeld og Carlson og Bloom sin er. Polya gav i 1945 ut den første utgaven av ”*How to solve it*”, som har blitt en av verdens mest suksessrike matematikkbøker. Boka har solgt i over en million eksemplarer og blitt oversatt til sytten språk (Polya, 2004). Mesteparten av arbeidet som ble gjort innenfor problemløsning på 1970- og 1980-tallet er basert på Polyas arbeid (Schoenfeld, 1992).

I ”*How to solve it*” presenterer Polya en rekke spørsmål som kan være svært nyttige når man skal løse problemer. Han deler problemløsningsprosessen inn i fire faser, og til hver fase introduserer han bestemte strategiske spørsmål som kan hjelpe problemløseren på vei mot løsningen (Polya, 2004). De fire fasene er som følger:

1. Forstå problemet
2. Lage en plan
3. Gjennomføre planen
4. Se tilbake

Første fase er å forstå problemet. Dersom en elev skal løse et problem, er det en forutsetning at han forstår problemet. Ifølge Polya (2004) må eleven i tillegg ha et ønske om å finne løsningen. I undervisningssammenheng fører det til at læreren må velge ut problemer som har en passende vanskelighetsgrad og er interessante for eleven. Veien fra å forstå problemet til å lage en plan for å finne løsningen kan være lang. Noen ganger kommer eleven fram til en plan litt etter litt og andre ganger kommer den som et lyn fra klar himmel. Eleven har en plan når han vet hvilke beregninger og/eller konstruksjoner han må gjøre for å løse problemet. Gode ideer til en plan er basert på tidligere erfaringer og kunnskap. Å gjennomføre planen er mye enklere enn å lage den. Eleven må imidlertid sjekke hvert trinn i løsningsprosessen og være overbevist om at de er riktige. Siste trinn er å se tilbake på den fullstendige løsningen. Eleven bør undersøke og vurdere både resultatet og løsningsmetoden. Kan han løse oppgaven på en annen måte? Kan resultatet eller løsningsmetoden løse andre problemer? (Polya, 2004).

Slik jeg tolker Polya (1981, 2004), er ikke de fire fasene i problemløsningsprosessen en stringent metode. De fire fasene er heller en veiledende inndeling som skal hjelpe problemløseren med å finne passende strategiske spørsmål blant de mange spørsmålene som Polya presenterer. Fasene skal også hjelpe problemløseren med å tenke framover. Hva er målet? Hva ønsker problemløseren å oppnå/finne ut? Jeg tolker det slik at prosessen er delvis lineær. Med det mener jeg at de fire fasene følger logisk etter hverandre, men at problemløseren har mulighet til, og ifølge Polya bør, gå tilbake til tidligere faser når han kommer til ”Se tilbake”.

Schoenfeld (1992, 1993, 2007) deler problemløsningsprosessen inn i seks faser: 1) lese, 2) analysere, 3) utforske, 4) planlegge, 5) implementere og 6) sjekke. Han studerte en matematiker og 100 videoer av elever i den videregående skolen mens de løste problemer. Resultatene viser at den erfarne matematikeren bruker mer enn halvparten av tiden på å forstå problemet. I stedet for å følge den første ideen han får, benytter han av den tildelte tiden (20 minutter) på analysering og strukturert utforskning. Han begynner ikke med ustrukturert utforskning og implementering før han er overbevist om at han arbeider i riktig retning. Derimot følger elevene ofte følgende strategi:

> Read, make a decision quickly, and pursue that direction come hell or high water. (Schoenfeld, 1992, s. 356)

Elevene leser problemet, velger en retning for arbeidet og fortsetter i den retningen resten av den tildelte tiden (20 minutter), til tross for at de ikke gjør fremgang. Resultatene fra Schoenfeld viser at mer enn 60 % av elevene forsøker å løse et problem på den nevnte måten (Schoenfeld, 1992, 1993). Elevene har kunnskapene de trenger for å løse problemet, men de klarer allikevel ikke å løse problemet. Ifølge Schoenfeld (2007) er årsaken at elevene ikke har effektive mekanismer for å reflektere over og gjøre om valgene de gjorde i begynnelsen av problemløsningsprosessen. Når elevene mangler evnen til å revurdere og reversere, vil valg av feil strategi garantere at elevene ikke finner en løsning (Schoenfeld, 1992). Elevene er ikke klar over, eller klarer ikke å benytte, de metakognitive ferdighetene som matematikeren behersker (Schoenfeld, 1993).

En nyere inndeling av problemløsningsprosessen er utarbeidet av Carlson og Bloom (2005). De studerte tolv matematikere[5] mens de løste matematiske problemer, og resultatene indikerer at problemløsning består av fire hovedfaser: 1) orientere, 2) planlegge, 3) utføre og 4) sjekke. Etter at matematikerne hadde orientert seg om hva problemet handlet om, ble en planlegge-utføre-sjekke-syklus repetert gjennom hele problemløsningsprosessen. Det var sjelden at noen av oppgavene ble løst på en lineær måte (fase 1-4 uten repetisjoner). Matematikerne reflekterte jevnlig over egne valg og handlinger gjennom alle de fire fasene, og refleksjonene så stort sett ut til å bevege matematikernes tenkning i en produktiv retning (Carlson & Bloom, 2005).

Min vurdering er at de tre beskrivelsene er nokså like. Til tross for at inndelingen og navngivingen er forskjellig, er innholdet stort sett det samme. Jeg mener at Polya sin inndeling ligner mye på Carlson og Bloom sin. De deler inn problemløsningsprosessen i like mange faser med tilsvarende fokus i hver fase. Slik jeg vurderer det, er Carlson og Bloom tydeligere på at enkelte faser gjentas (planlegge-utføre-sjekke-syklusen), og jeg mener det gir et riktigere helhetsbilde av problemløsningsprosessen. Schoenfeld deler inn problemløsningsprosessen i seks faser. Min vurdering er at de tre første fasene (lese, analysere og utforske) kan omfatte det som ligger i Polyas første trinn, forstå problemet, og Carlson og Blooms første trinn, orientere. Videre er de tre siste fasene til Schoenfeld samsvarende med de tre siste fasene til Polya og Carlson og Bloom, i rekkefølgen som er oppgitt i presentasjonen.

[5] Åtte forskere og fire doktorgradsstudenter i matematikk fra to store, offentlige universiteter i USA.

3.1.3 Hva er kompetanse?

Som nevnt, er matematikkutdannere enige om at problemløsning bør ha en viktig rolle i læreplanen i matematikk (Lester, 1994). Videre er det ifølge Schoenfeld (1994) en generell aksept om at problemer og problemløsningsprosessen er en viktig del av matematikkutdanningen. Samfunnet stiller krav om at elever kan håndtere og handle passende i nye situasjoner. Begrepet kompetanse har vist seg å være godt egnet til å beskrive de faglige og menneskelige kravene som stilles til den enkelte i dagens samfunn. Elever må for eksempel kunne vurdere, analysere, danne seg en mening og handle på grunnlag av meningen når de møter en utfordring (Jørgensen, 2001).

I 2002 kom Mogens Niss og Jensen med en beskrivelse av matematisk kompetanse. Beskrivelsen var et resultat av prosjektet ”Kompetencer og matematiklæring” (KOM-prosjektet). Målet var å komme med en karakterisering av matematisk faglighet, basert på matematiske kompetanser, som kunne brukes som et verktøy for å utvikle matematikkutdanningen i Danmark (Blomhøj & Jensen, 2007; Niss & Jensen, 2002). Niss og Jensen (2002) argumenterer for at læreplaner i matematikk bør unngå å legge vekt på pensumlister, men i stedet fokusere på at elevene skal utvikle de ulike matematiske kompetansene, som jeg skal ta for meg senere. De påpeker at prosjektet verken er et forskningsprosjekt eller et implementeringsobjekt. Videre foreslår de ingen, og ønsker ikke å foreslå, konkrete tiltak til bruk i undervisningspraksisen, for eksempel i forhold til evaluering (Niss & Jensen, 2002).

Niss og Jensen (2002) velger å bruke begrepet kompetanse i betydningen av ekspertise, og *matematisk kompetanse* betyr da:

> at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå (Niss & Jensen, 2002, s. 43)

Videre påstår de at de kan utpeke åtte sentrale matematiske kompetanser som til sammen utspenner matematisk kompetanse. Niss og Jensen (2002) definerer *en matematisk kompetanse* som:

> indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer (Niss & Jensen, 2002, s. 43)

En matematisk kompetanse består i å være klar til å handle hensiktsmessig i situasjoner med bestemte matematiske utfordringer. På den måten kan kompetanse oppfattes som et innsiktsbasert handleredskap (Niss & Jensen, 2002), basert på, men ikke identisk lik, verken kunnskap eller ferdigheter (Blomhøj & Jensen, 2007). I likhet med Jensen (2007) sin beskrivelse av kompetanse, er en matematisk kompetanse knyttet til en situasjon. Niss og Jensen sin beskrivelse av matematisk kompetanse består av åtte kompetanser, som er fordelt i to hovedgrupper eller "overkompetanser". Den ene hovedgruppen omfatter kompetanser en person trenger for å spørre og svare i, med og om matematikk:

1. Tankegangskompetanse
2. Problembehandlingskompetanse
3. Modelleringskompetanse
4. Resonneringskompetanse

Den andre hovedgruppen omfatter kompetanser innen det å omgå språk og redskaper i matematikk:

5. Representasjonskompetanse
6. Symbol- og formalismekompetanse
7. Kommunikasjonskompetanse
8. Hjelpemiddelkompetanse

En matematisk kompetanse er et selvstendig, relativt avgrenset område, men det finnes relasjoner eller overlappinger mellom ulike kompetanser. Det medfører at en kompetanse ikke kan bli ervervet i isolasjon fra andre kompetanser. Selv om kompetansene er inndelt i to hovedgrupper, bidrar alle de åtte kompetansene direkte eller indirekte til en persons besittelse av "overkompetansene". Det kan i tillegg være en like nær forbindelse mellom to kompetanser som er plassert under hver sin overkompetanse, som to under samme overkompetanse (Niss & Jensen, 2002). Ifølge Niss og Jensen (2002) har alle kompetansene to sider, en produktiv og en undersøkende.

Den produktive siden av en kompetanse består i å kunne gjennomføre de prosessene som inngår i kompetansen, men den undersøkende side består i å kunne forstå, analysere og kritisk bedømme prosesser som allerede er utført og deres produkter.

En av kompetansene som Niss og Jensen (2002) beskriver er problembehandlingskompetanse. Jeg velger kun å ta for meg den kompetansen i masteroppgaven siden den er den eneste som direkte angår min problemstilling. *Problembehandlingskompetansen* består i å kunne formulere og å kunne løse matematiske problemer. Formulering av problemer består i å kunne finne, formulere, avgrense og presisere forskjellige matematiske problemer, enten de er åpne eller lukkede. Å kunne løse problemer består i å kunne løse ferdigformulerte problemer, enten de er laget av en selv eller andre. I tillegg skal man, om ønskelig, kunne løse et bestemt problem på flere forskjellige måter. I likhet med Polya (1981, 2004), Schoenfeld (1985, 1992, 1993), Björkqvist (2003), Jensen (2007) og Boesen (2006), er et problem her et relativt begrep og avhenger av personen som skal løse det. Det betyr at det som for en person kan være en rutineoppgave, kan være et problem for andre, og omvendt. Oppgaver som en person kan løse ved å bruke rutineferdigheter, blir ikke regnet som matematiske problemer. Det gjør heller ikke spørsmål som ikke krever noen form for matematisk undersøkelse, for eksempel ”Hva betyr det når det står 1 i 213” (Niss & Jensen, 2002).

Niss og Jensen (2002) hevder at det å kunne formulere et problem ikke er det samme som å kunne løse problemet. De mener at det er fullt mulig å formulere et problem som en ikke klarer å løse. Motsatt kan man være god til å løse problemer, men ikke til å formulere gode problemer. Jeg er enig i påstanden til Niss og Jensen. I praksisperiodene mine så jeg flere elever som var svært dårlige til å formulere egne problemer. Resultatet ble ofte en oppgave som lignet på oppgavene i læreboka, men gjerne med andre tall, bokstaver eller navn. Dersom de imidlertid fikk et ferdig oppstilt problem[6], hadde de ingen eller få problemer med å løse det. Videre er det mulig for meg å lage et problem

[6] Slik jeg definerer et problem i studien min.

som jeg ikke klarer å løse. Et eksempel er å løse følgende differensialligning: $xy'' + 2y' + 4xy = 0$.

Tine Wedege (2003) kritiserer Niss og Jensen (2002) sitt kompetansebegrep. Hun hevder at ”Der findes ingen kompetencer - kun kompetente mennesker” (Wedege, 2003, s. 64). Niss og Jensen presenterer kompetanser som noe en person har. Ifølge Wedege kan man snakke om kompetente mennesker, men ikke mennesker som besitter en kompetanse. Hun mener at det ikke finnes kompetanse uten et handlende menneske. Videre mener hun at kompetanse også har en affektiv dimensjon, og hun kritiserer Niss og Jensen for at de ikke har trukket den inn. Ifølge Wedege (2003) består kompetanse av en dimensjon som omfatter kunnskap og ferdigheter og en som omfatter affektive faktorer, som holdninger, forestillinger og følelser. Hun hevder at den affektive dimensjonen er nødvendig for at en person skal gjøre noe. Kunnskap og ferdigheter blir ikke tatt i bruk før de affektive faktorene trekkes inn.

En annen type beskrivelse av *matematisk kompetanse* finner jeg i Boesen (2006). Beskrivelsen er utarbeidet av Torulf Palm, Ewa Bergqvist, Ingela Eriksson, Timo Hellström og Carl-Magnus Häggström (2004). Den er basert på analyser av læreplanverket og tilhørende politiske dokumenter for den videregående skolen i Sverige, og målet var at kompetansene skulle være enkle å kommunisere og forståelige for lærere og personer som lager oppgaver og utvikler prøver (Boesen, 2006; Palm, et al., 2005). Jeg understreker at beskrivelsen ikke er tilpasset grunnskolen som står i fokus i min studie.

Beskrivelsen som Boesen benytter inneholder seks kompetanser:

1. Problemløsningskompetanse
2. Algoritmekompetanse
3. Begrepskompetanse
4. Modelleringskompetanse
5. Resonneringskompetanse
6. Kommunikasjonskompetanse

De seks kompetansene som utspeiler matematisk kompetanse har sin egen identitet, men det finnes relasjoner og overlappinger mellom dem. I så måte ligner beskrivelsen på Niss og Jensen sin beskrivelse av matematisk kompetanse.

En av kompetansene som Boesen (2006) beskriver er problemløsningskompetansen. På samme måte som i diskusjonen av Niss og Jensen (2002) sine kompetanser, velger jeg kun å ta for meg problemløsningskompetansen til Boesen siden det er den som direkte angår oppgaven min. *Problemløsningskompetansen* er definert alene som å kunne løse et problem (Palm, et al., 2004). Et problem er her en oppgave som en elev ikke har en kjent løsningsmetode for å løse. For å løse et problem, må eleven produsere ny kunnskap, altså tilpasse egne kunnskaper til en ny situasjon (Palm, et al., 2004). Om en oppgave krever problemløsningskompetanse, avhenger både av problemet og problemløseren, i likhet med definisjonene til Polya (1981, 2004), Schoenfeld (1985, 1992, 1993), Björkqvist (2003), Jensen (2007), Boesen (2006) og Niss og Jensen (2002). Typer oppgaver hvor eleven kan trenge problemløsningskompetanse er oppgaver som er ukjente for eleven, oppgaver hvor gitt informasjon er annerledes enn hva elevene er vant til og sammensatte oppgaver (Boesen, 2006).

Jeg mener at Wedege (2003) sin kritikk av Niss og Jensen (2002) sitt kompetansebegrep også er gyldig for kompetansebeskrivelsen som Boesen (2006) benytter. Boesen trekker ikke inn den affektive dimensjonen av kompetanse i sin beskrivelse, og han betrakter kompetanse som noe en person har.

Palm m. fl. (2004) hevder at de to kompetansebeskrivelsene ligner på hverandre, men gir ingen argumenter eller begrunnelse for påstanden. Min vurdering er at de har visse fellestrekk. Begge betrakter kompetanse som noe en person har eller kan oppnå, og de tar ikke hensyn til den affektive dimensjonen av kompetanse. Slik jeg vurderer det, er det imidlertid nokså store forskjeller mellom beskrivelsene. De to kompetansebeskrivelsene har ulike mål. Niss og Jensen (2002) ønsket å lage et verktøy som kunne bistå utviklingen av matematikkutdanningen i Danmark. De argumenterer for at læreplaner i matematikk bør legge vekt på at elevene skal utvikle de ulike matematiske kompetansene. Kompetansebeskrivelsen fra Boesen (2006) er derimot laget for å kunne bistå arbeidet med utvikling av prøver, og da spesielt nasjonale prøver i Sverige. Slik jeg vurderer det, presenterer Niss og Jensen en beskrivelse av matematisk kompetanse som er bredere og mer omfattende enn Boesen. Jeg mener at en årsak kan være at Boesen sin matematiske kompetanse er basert på analyser av læreplanverket og tilhørende politiske dokumenter for den videregående skolen i Sverige. Min vurdering er at det betyr at analysene tar utgangspunkt i et begrenset syn på utdanning og undervisning. Et syn som baserer seg på et kompromiss mellom flere ulike syn på utdanning og undervisning (Solstad & Rønningen, 2003). Niss og Jensen har i stedet en bred tilgang med tanke på utdanningstrinn, matematikk og matematikkundervisning. De begrenser seg ikke til bestemte utdanningstrinn, et bestemt syn på matematikk som fag eller en spesiell form for matematikkundervisning. Prosjektet deres angår befolkningens matematikkunnskaper, ikke kun en begrenset gruppes matematikkunnskaper.

Niss og Jensen (2002) har ikke dokumentert at de åtte kompetansene de presenterer faktisk utspenner og omfatter det viktigste i matematisk kompetanse, verken teoretisk eller empirisk. De påpeker at det kun er snakk om en pragmatisk påstand og at avklarende overveielser og konkret bruk vil avgjøre om påstanden fungerer i praksis. Boesen (2006) sin beskrivelse tar utgangspunkt i innholdet i et eksisterende læreplanverk og tilhørende politiske dokumenter. Min vurdering er at Boesen sin beskrivelse vil fungere godt for elevgruppen den er beregnet på, men mindre godt for andre elevgrupper. Niss og Jensen sin beskrivelse er mer generell, og jeg mener den har et større potensial for å fungere for ulike grupper av elever.

Inndelingen i matematiske kompetanser er forskjellig i de to beskrivelsene. Niss og Jensen sin beskrivelse inneholder åtte matematiske kompetanser, mens Boesen inneholder seks. Slik jeg vurderer det, er Boesen sine seks kompetanser inneholdt i Niss og Jensen sine åtte kompetanser. Med det mener jeg at det er mulig å fordele innholdet i Boesen sine kompetanser på de åtte kompetansene til Niss og Jensen, men ikke motsatt. Et eksempel på det siste er bruk av hjelpemidler. Niss og Jensen har en egen hjelpemiddelkompetanse som består av å ha kjennskap til og å kunne benytte redskaper som brukes i matematikk. Eksempler er lommeregnere, datamaskiner, grafiske tegneprogrammer, tabeller, linjaler, passere og gradskiver. Boesen trekker kun inn bruk av lommeregner i sin beskrivelse av algoritmekompetanse.

Videre mener jeg at det kun er en enkelt forskjell på problembehandlingskompetansen til Niss og Jensen (2002) og problemløsningskompetansen til Boesen (2006). I Niss og Jensen sin definisjon av problembehandlingskompetanse er oppstilling og løsning av problemer inkludert. Oppstilling betyr å kunne:

> detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer, "rene" såvel som "anvendte", "åbne" såvel som "lukkede" (Niss & Jensen, 2002, s. 49)

Boesen sin definisjon inneholder kun selve problemløsningen. Det betyr at Niss og Jensens problembehandlingskompetanse er mer omfattende enn Boesen sin. Formulering av problemer nevnes ikke i noen av de seks matematiske kompetansene til Boesen. Min vurdering er at Niss og Jensen sin problembehandlingskompetanse er mest passende for den måloppnåelsen L97 ønsker at elevene skal arbeide mot[7]. Årsaken er at læreplanen i matematikk krever at elevene skal kunne formulere egne problemer. Jeg beskriver L97 nærmere senere i oppgaven.

3.1.4 Kreativ og imiterende resonnering

Presentasjonen av ulike definisjoner av problem og problemløsning har vist at begrepene er individrelaterte. En oppgave som er et problem for en elev, behøver ikke være det for en annen. Det skaper et problem når jeg, som forsker, ønsker å undersøke ulike oppgaver og avgjøre om de er problemløsningsoppgaver (problemer) eller ikke. Boesen (2006) løser det ved å se på hvilken type resonnering oppgaven krever av eleven. Et problem[8] er, som nevnt, en oppgave uten fullstendig kjent løsningsmetode. Dersom eleven skal løse et problem, kan han ikke lenger imitere eksempler og oppgaver han har sett tidligere. Eleven må produsere noe nytt!

Analyseverktøyet og det tilhørende teoretiske rammeverket jeg skal benytte i studien er hentet fra Boesen (2006). Den teoretiske inndelingen er basert på Johan Lithner (2005)

---

[7] Kompetansebegrepet ble lite brukt i L97, som i stedet bruker betegnelsen måloppnåelse. Det overordnede målet i læreplanverket er imidlertid at elevene skal utvikle helhetlig kompetanse. L97 anser kunnskap, ferdigheter og holdninger som likeverdige innslag i den helhetlige kompetansen. Elevene skal oppnå slik kompetanse ved å arbeide med læreplanens mål (NOU, 2003).

[8] Når jeg heretter bruker ordet problem, mener jeg matematisk problem.

sin teoretiske strukturering av forskjellige typer resonnering som er funnet i empiriske studier. Jeg vil her presentere det teoretiske rammeverket som analyseverkøyet bygger. En mer inngående presentasjon finnes i Boesen (2006), Lithner (2005) og Palm m. fl (2005).

Det teoretiske rammeverket definerer ulike typer resonnering som er funnet i empiriske studier. Ved å studere hvilke typer matematisk resonnering en elev trenger for å løse en gitt eksamensoppgave, kan vi, som forskere, si om oppgaven er en problemløsningsoppgave eller ikke. I det teoretiske rammeverket deler han matematisk resonnering inn i to hovedtyper, kreativ resonnering (creative mathematically founded reasoning) og imiterende resonnering (imitative reasoning). *Resonnering* er:

> a line of thought, the way of thinking, adopted to produce assertions and reach conclusions (Boesen, 2006, s. 17).

Resonneringen trenger ikke være basert på formell logikk, det viktigste er at resonneringen er logisk for personen som resonnerer. Å kunne løse et matematisk problem er knyttet til kreativ resonnering (Boesen, 2006; Palm, et al., 2005).

Argumentering er en sentral del av resonneringsprosessen, og målet er å overbevise seg selv eller andre om at resonneringen er riktig. To typer argumentasjon er viktig, 1) valg av strategi og 2) implementering av strategi. Valg av strategi omfatter forsøk på å velge en strategi som kan løse problemet (Lithner, 2005), og noen eksempler er å velge, huske, konstruere, oppdage og gjette. Valg av strategi kan bli fulgt opp av forutseende argumentering (Vil strategien løse oppgaven?). Implementering av strategi kan bli etterfulgt av verifisering (Løste strategien oppgaven?) (Boesen, 2006; Palm, et al., 2005).

Kreativ resonnering (KR) i matematikk er definert som resonnering som tilfredsstiller følgende krav:

1. Ny (novelty): En ny sekvens med løsningsresonnering blir laget, eller en glemt sekvens blir gjenskapt.
2. Fleksibel: Den tillater forskjellige tilnærmelser og tilpasninger til situasjonen.

3. Sannsynlig: Argumentene som støtter strategien og/eller implementeringen av strategien, fungerer som motivasjon for at konklusjonene er riktige/sannsynlige.
4. Basert på matematikk (mathematically founded): Argumentene er basert på de grunnleggende, matematiske egenskapene til komponentene som er involvert i resonneringen. (Boesen, 2006, s. 20, min oversettelse)

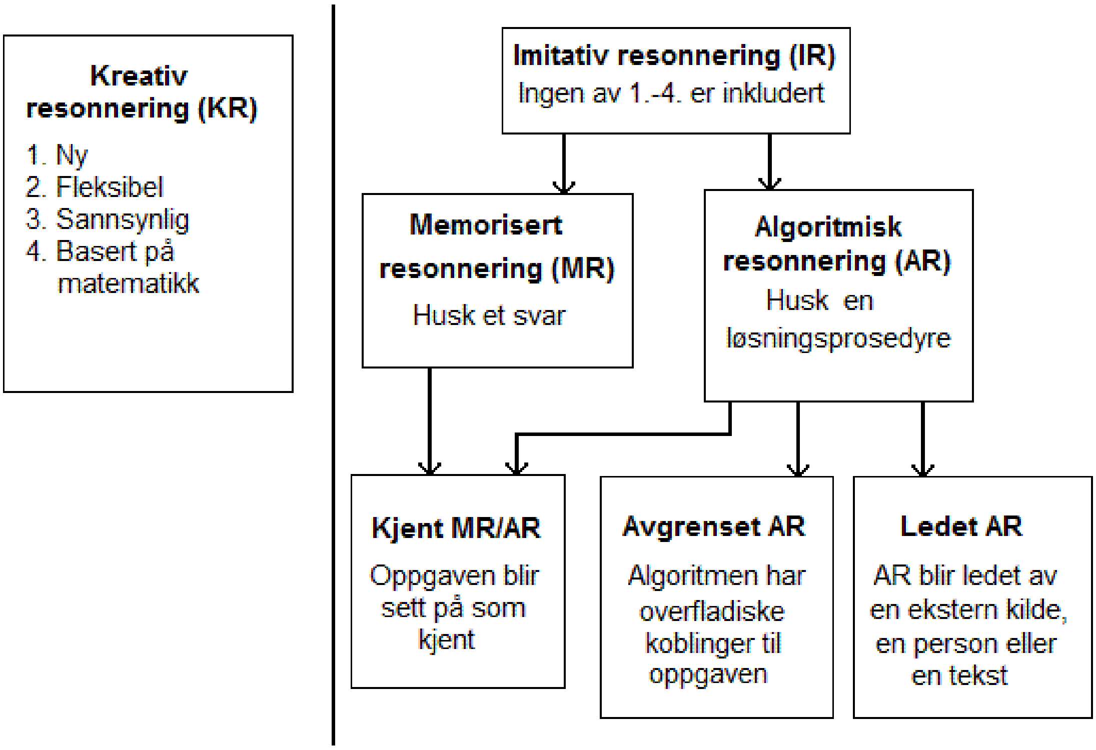
Resonnering som er en imitering av et svar eller en løsningsprosedyre er ikke definert som kreativ resonnering, fordi kravet om at resonneringen skal være ny ikke er tilfredsstilt. Å basere resonneringen på gjetninger, vage intuisjoner eller affektive reaksjoner blir heller ikke sett på som kreativ resonnering. Kravet om at resonneringen skal være sannsynlig er da ikke tilfredsstilt.

Resonnering som ikke tilfredsstiller kravene til kreativ resonnering, definerer Boesen (2006) som *imiterende resonnering* (IR). Ifølge Boesen har mange studier vist at imiterende resonnering er mye brukt av elever (og lærere), og han hevder at det kan være noe av grunnen til at mange elever sliter i matematikk. Et eksempel er nøkkelordstrategien hvor ordet ”mer” er knyttet til addisjon og ”mindre” er knyttet til subtraksjon (Hegarty, Mayer, & Monk, 1995). Imiterende resonnering er kjennetegnet av overfladisk leting etter lignende eksempler og løsningsprosedyrer som kan bli kopiert eller reprodusert for å løse en gitt oppgave.

Imiterende resonnering kan ikke fungere som grunnlag for å løse oppgaver uten kjent løsningsmetode (problemer). Dersom elever sjelden får oppgaver som krever annet enn imiterende resonnering i matematikk, vil de ikke få en sjanse til å utvikle problemløsningsferdigheter i faget. De vil ha svært begrensede muligheter til å konstruere egne måter å resonnere på, noe som er et krav når elevene skal løse problemer (Boesen, 2006).

Boesen (2006) deler kreativ resonnering inn i to typer, lokal og global kreativ resonnering. *Lokal kreativ resonnering* (LKR) er først og fremst basert på imiterende resonnering, men inneholder små, lokale elementer av kreativ resonnering. *Global kreativ resonnering* (GKR) inneholder store elementer av kreativ resonnering, men kan også inneholde store elementer av imiterende resonnering. Forskjellen mellom kreativ og imiterende resonnering er at det ikke er mulig å gjøre kreativ resonnering tilfeldig, uten å ta hensyn til grunnleggende, matematiske egenskaper til objektene som inngår i oppgaven. Selv i lokal kreativ resonnering kan det være nødvendig å forstå store deler av oppgaven, før eleven kan ta valg som omfatter kun en liten, lokal del av oppgaven.

Imiterende resonnering deler han inn i minnebasert resonnering (memorised reasoning) og algoritmisk resonnering (algorithmic reasoning). *Minnebasert resonnering* (MR) er definert som resonnering hvor strategivalget er basert på å huske svaret på oppgaven og implementering av strategi består av å skrive ned svaret. Et eksempel er å pugge løsningen av en gitt andregradsligning. For eksempel er $x = -2$ løsningen av ligningen $x^2 + 4x + 4 = 0$. *Algoritmisk resonnering* (AR) er definert som resonnering hvor strategivalget består av å huske en algoritme som er garantert å gi riktig svar og implementeringen av strategien består av å bruke algoritmen. Et eksempel er å huske formelen for å løse andregradsligninger. Eleven kan da fylle inn, regne ut og skrive ned svaret.



Figur 1: Oversikt over kreativ og imiterende resonnering (Boesen, 2006, s. 18)

Ifølge Boesen (2006) viser empiriske studier at det eksisterer fire, delvis overlappende typer imiterende resonnering. *Kjent minnebasert resonnering* (KMR) eller *kjent algoritmisk resonnering* (KAR) består av resonnering hvor strategivalget innebærer å undersøke om oppgaven ligner oppgaver eleven har et fullstendig svar eller en kjent algoritme for å løse. Siden en del elever baserer sammenligningen på overfladisk tolkning av oppgaveteksten, hender det at de tror at en oppgave er av en bestemt, kjent type, til tross for at den ikke er det. *Avgrenset algoritmisk resonnering* (AAR) kjennetegnes ved at algoritmen som eleven velger å benytte blir valgt fra et sett algoritmer som er avgrenset av den som resonnerer, på bakgrunn av overfladiske egenskaper som kan kobles til oppgaven. Et eksempel er en elev som får en oppgave med ordet terning. Eleven har to formler han knytter til terninger, for eksempel en for volum og en for overflate. Dersom eleven benytter resonnering basert på overfladiske egenskaper, vil det være tilfeldig hvilken av de to kjente formlene eleven velger å bruke for å løse oppgaven. Noen ganger vil han velge rett formel, andre ganger feil. *Ledet algoritmisk resonnering* (LAR) er når en ekstern kilde leder elevens resonnering. Det mest vanlige er en person eller en tekst (Boesen, 2006; Palm, et al., 2005). Se figur 1 for en oversikt over de ulike typene resonnering.

Boesen (2006) hevder det er tvilsomt at imiterende resonnering vil være effektiv for en elev som ønsker å lære avansert, matematisk tenkning eller å oppnå relasjonell forståelse. Min vurdering er at imiterende resonnering kan bli knyttet til instrumentell forståelse og kreativ resonnering til relasjonell forståelse. Begrepene instrumentell og relasjonell forståelse er konstruert av Richard R. Skemp (1987). Ifølge han vil en elev med *instrumentell forståelse* kunne benytte regler han kjenner til i sammenhenger som ligner på situasjoner han er kjent med. Han har imidlertid ikke en dypere forståelse av hvorfor han velger å bruke en bestemt regel. Jeg forstår det slik at en elev som baserer seg på imiterende resonnering, høyst sannsynlig kun vil ha mulighet til å oppnå instrumentell forståelse. Siden resonneringen tar utgangspunkt i overfladiske, matematiske egenskaper ved oppgaven, vil han i liten grad ha mulighet til å tilpasse resonneringen til nye situasjoner. Eleven vil være i stand til å løse oppgaver som har en kjent løsningsmetode, men uten en kjent løsningsmetode vil han stå helt fast. Ifølge Skemp (1987) er *relasjonell forståelse* mer tilpasningsdyktig. En elev med relasjonell forståelse er ikke avhengig av å huske fakta og algoritmer for å kunne løse oppgaver. Eleven kan produsere en ny måte å løse en gitt oppgave på, med bakgrunn i forståelse av grunnleggende, matematiske begreper og sammenhenger. Slik jeg tolker det, er kreativ resonnering nødvendig for å oppnå relasjonell forståelse. Kreativ resonnering er ny, fleksibel og baserer seg på de grunnleggende, matematiske egenskapene til objektene i oppgaven (Boesen, 2006).

3.1.5 KappAbel

Ifølge Boesen (2006) er problemløsning knyttet til kreativ resonnering. Eleven må produsere ny kunnskap, basert på eksisterende kunnskap og erfaringer (Boesen, 2006; Palm, et al., 2005). Som nevnt tidligere, argumenterer Niss og Jensen (2002) og Palm m. fl. (2004) for at evnen til å løse problemer er en del av den matematiske kompetansen. Niss og Jensen (2002) argumenterer videre for at fokuset i matematikkundervisningen bør være å utvikle elevenes matematiske kompetanse. I norske læreplaner i matematikk har problemløsning i flere år vært et fokusområde. Allikevel har problemløsning fått lite gjennomslag i matematikkundervisningens praksis (Alseth, et al., 2003).

Min mening er at matematikkonkurransen KappAbel er et eksempel på en aktivitet som har gjort at problemløsning har fått en plass i norske klasserom. Konkurransen er landsomfattende, og alle elever på 9. trinn kan delta. Hvert år deltar mellom 20 % og 23 % av norske skoler med elever på ungdomstrinnet i konkurransen[9]. Wedege og Jeppe Skott med Kjersti Wæge og Inge Henningsen (2006) har undersøkt hvilken påvirkning KappAbel har på undervisningens praksis og elevenes syn på matematikk. For å se om praksisen har endret seg, hevder Wedege og Skott at man må se bak de umiddelbart observerbare handlingene i klasserommet. I stedet må man undersøke om og hvordan de gjensidige forventningene til deltakerne i praksisen har endret seg. I det ligger det å se nærmere på utviklingen av den didaktiske kontrakten, altså de implisitte og eksplisitte reglene for sosial og matematisk samspill i et bestemt klasserom (Wedege, et al., 2006).

---

[9] Prosentandelen ble oppgitt i e-postkorrespondanse med Roald Buvig, daglig leder i KappAbel-stiftelsen, i mai 2009, og gjelder for skoleåret 2005/2006 til 2008/2009.

Resultatene viser at KappAbel fungerer mer som et supplement til undervisningen enn som en faktor som endrer undervisningens praksis. KappAbel sørger for at elevene får samarbeide om å lage og løse problemer mens konkurransen pågår, men resten av skoleåret er praksisen i klasserommene omtrent uendret. Konkurransen gir også elevene et bredere syn på matematikk, i form av at matematikk er mer enn å følge gitte prosedyrer (Wedege, et al., 2006). Ifølge Wedege m. fl. (2006) er et av målene med KappAbel å vise at matematikk består av mer enn riktige svar. KappAbel legger stor vekt på oppdagelse, fantasi, undring og samarbeid, faktorer som er sentrale i det norske læreplanverket for grunnskolen fra 1997 (KUF, 1996a). Elevene kan ikke forvente at de kan løse oppgavene i KappAbel ved å lese teori, se på eksempler og løse oppgaver i læreboka (Wedege, et al., 2006). Min vurdering er at oppgavene i KappAbel krever at elevene behersker kreativ resonnering. Elevene kan ikke imitere eksempler og oppgaver de har sett og gjort i lærebøkene når de skal løse KappAbel-oppgavene. De må benytte eksisterende kunnskap og erfaringer i nye situasjoner og utvikle ny kunnskap.

3.2 MÅL FOR MATEMATIKKUNDERVISNINGEN

Niss og Jensen (2002) argumenterer, som nevnt, for at læreplaner i matematikk bør legge vekt på at elevene skal utvikle de åtte matematiske kompetansene, hvor problembehandlingskompetansen er en av dem. Målet for undervisningen blir å arbeide for at elevene utvikler sine matematiske kompetanser. På et mer generelt grunnlag hevder Niss (2003) at det kun er tre årsaker til at samfunnet bruker ressurser på å undervise elever i matematikk. Jeg argumenterer her for at problemløsning er viktig i alle tre.

3.2.1 Tre grunnleggende årsaker

Årsakene eller grunnene til at samfunnet bruker ressurser på å gi elever undervisning i matematikk trenger ikke være eksplisitte, veldefinerte eller uttalte. Det behøver heller ikke herske enighet om dem. Grunnene er gjerne utydelige, vage og del av et komplekst nett som blant annet består av ulike samfunnsmessige, politiske og kulturelle motiver (Niss, 2003). Inngående analyser av matematikkundervisningen gjort ut i fra et historisk og moderne perspektiv har vist at det kun er et fåtall generelle årsaker til at alle elever blir undervist i matematikk (Antonius, 2003; Niss, 2003). Niss (2003) trekker frem tre hovedgrunner:

- Den skal bidra til den teknologiske og sosioøkonomiske utviklingen i samfunnet i grove trekk, enten for seg selv eller i konkurranse med andre samfunn og nasjoner.
- Den skal bidra til at samfunnet opprettholdes og utvikles politisk, ideologisk og kulturelt, enten for seg selv eller i konkurranse med andre samfunn eller nasjoner.
- Den skal gi individer de forutsetningene de trenger for å håndtere det som skjer i forskjellige perioder av livet deres – i utdanningen, i yrkeslivet, privat, på fritiden og i rollen som samfunnsborger. (Niss, 2003, s. 291)

De to første hovedgrunnene er knyttet til samfunnets opprettholdelse og utvikling, mens den tredje er knyttet til individet som er en del av samfunnet. Bak de tre årsakene ligger en tro på at matematikkundervisningen faktisk kan bidra til utviklingen av teknologi, sosioøkonomi og samfunn, i tillegg til å gi individer de forutsetningene de behøver (Niss, 2003). Jeg finner indikasjoner på at alle årsakene er til stede i L97. Felles for all opplæring under L97 er at den skal medvirke til et felles kunnskaps-, verdi- og kulturgrunnlag hos alle elever. Den skal også sikre den enkeltes og samfunnets behov for kompetanse. Læreplanen i matematikk legger vekt på matematikkens rolle innenfor teknologi, økonomi, utformingen av samfunnet og vårt daglige miljø. Videre fremhever L97 betydningen matematikk har for utviklingen av andre fag og vitenskaper. L97 presiserer at kunnskap og ferdigheter i matematikk gir elevene et viktig grunnlag for å delta, forstå og påvirke samfunnet. For den enkelte er matematikk et praktisk redskap han kan ha nytte av i skolehverdagen, fritiden, arbeidsliv og samfunnsliv (KUF, 1996a).

Evnen til å løse problemer er viktig i alle de tre hovedgrunnene. Utviklingen av samfunnet, enten den er teknologisk, sosioøkonomisk, politisk, ideologisk eller kulturelt, er avhengig av mennesker som kan løse problemer. De må utvikle noe nytt! Dersom et samfunn kun består av mennesker som ikke klarer å løse problemer, vil utviklingen stoppe opp. Nye problemer som oppstår vil ikke kunne løses. Det gjelder ikke matematiske problemer alene, men også problemer innenfor områder som anvender matematikk. Eksempler er medisin, økonomi, naturvitenskap, teknologi og kommunikasjon. Videre er en grunnleggende forutsetning for at et individ skal kunne håndtere det som skjer i forskjellige perioder i livet sitt, at vedkommende har evne til å takle nye og ukjente situasjoner. Det faktum at problemløsning er en del av den matematiske kompetansen til Niss og Jensen (2002) og Boesen (2006) støtter opp om påstanden. Senere i oppgaven argumenterer jeg også for at L97 har et stort fokus på problemløsning, noe som antyder at myndighetene anser problemløsning som viktig.

3.2.2 Nytte og danning

Gjone (1994) hevder at begrunnelsen for matematikkundervisning i skolen har vekslet mellom fokus på nytte og danning. Matematikken skal på den ene siden være nyttig. Et eksempel på det finner jeg i læreplanverket for den 10-årige grunnskolen fra 1997, hvor matematikk blir fremstilt som et redskapsfag som eleven kan ha nytte av på og utenfor skolen (KUF, 1996a). På den andre siden skal matematikk bidra til dannelsesprosessen. Målet om at ”elevene utvikler innsikt i matematikkens historie og fagets rolle i kultur og vitenskap” er et eksempel på det (KUF, 1996a, s. 158). Gjone (1994) påpeker at begrepet danning vil oppfattes ulikt for ulike grupper i samfunnet, og at det kan endre seg over tid. I presentasjonen av M87 og L97 vil jeg komme nærmere inn på hvilket fokus jeg mener er dominerende i de respektive læreplanene i matematikk.

Et annet perspektiv på hensikten med matematikkutdanning finner jeg hos Paul Ernest (2004). Han skiller mellom relevans (relevance) og nytte (utility). Begrepet *nytte* forstår han som ”a narrowly conceived usefulness that can be demonstrated immediately or in the short term, without consideration of broader contexts or longer term goals”(s. 314). Et nyttebetont syn på hensikten med matematikkutdanning har tro på at matematikk og matematikkutdanning er en drivkraft som øker velferden og bidrar til suksess i industrien. Ifølge Ernest (2000) er nytten av skolematematikken i den moderne verden sterkt overvurdert. Videre hevder han at nytteargumentet er en dårlig begrunnelse for universell undervisning i matematikk gjennom hele den obligatoriske skolegangen. Ernest (2004) introduserer begrepet *relevans* som en motsetning til begrepet nytte. Relevans er en relasjon mellom tre elementer (R, P, G). R er det som relevansen er tillagt, og kan være en situasjon, en aktivitet eller et objekt. P er en person eller gruppe som tillegger relevansen til R, mens G er et mål som representerer verdiene til P. Altså vurderer person P objektet R til å være relevant for å oppnå målet G. Et eksempel fra læreplanverket L97 lyder som følger: Myndighetene (gruppen P) ser på målene i læreplanen (objektet R) som relevante for at elevene skal oppnå helhetlig kompetanse (målet G).

Ifølge Ernest (2004) er det viktig forståelse av relevans som mangler i diskusjonen om mål i matematikk, nemlig elevenes egne syn på skolematematikken og relevansen til deres personlige mål. Han hevder at det ikke er grunn til å anta at elever vil se på den utvidede læreplanen[10] som relevant, selv om myndighetene gjør det. Videre påpeker han at elevenes forestillinger om relevansen og nytten av matematikk ofte reflekterer den utbredte retorikken om hvor viktig og verdifull matematikken er i samfunnet (Ernest, 2004, s. 316).

3.3 Læreplanteori

Samfunnets forventninger til skolen gjenspeiler seg blant annet i det gjeldende læreplanverket. Det blir utarbeidet av skolemyndighetene og inneholder retningslinjer og mål som styrer arbeidet i skolen (Gjone, 2003). Læreplanverket er et politisk dokument som blir utarbeidet gjennom et samspill mellom politikere og deres politiske mål, skolen, lærere, pedagoger, foreldre og samfunnet (Gjone, 2003; Sundback, 2005). Et nytt læreplanverk vil derfor være et kompromiss mellom ulike syn på utdanning og undervisning (Solstad & Rønningen, 2003). I forbindelse med utarbeidelsen av Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2006) oppnevnte Kunnskapsdepartementet læreplangrupper som skulle hjelpe til i arbeidet med å fastsette innholdet i alle fag i skolen (Kunnskapsdepartementet, 1998). Universiteter, høgskoler, fylkesmennenes utdanningsavdelinger, lærer- og skoleorganisasjoner og de nasjonale sentrene kunne komme med forslag på aktuelle personer til læreplangruppene. Kriteriene for å delta var blant annet tidligere læreplanarbeid, tidligere arbeid med kompetanseutvikling og faglighet (Skarheim & Først, 2004). Siden et nytt læreplanverk må få et nødvendig flertall hos skolemyndighetene, kan det lett inneholde momenter som ikke samsvarer med hverandre eller formuleringer som kan bli tolket forskjellig av ulike grupper (Alseth, et al., 2003; Solstad & Rønningen, 2003). Et eksempel på det første er

[10] Jeg oversetter "curriculum" til den utvidede læreplanen.

læreplanverket fra 1997 (KUF, 1996a) som på den ene side stilte krav om lokal tilpasning, men på den andre side hadde nokså detaljerte krav til hvilke kunnskaper elevene skulle tilegne seg.

Det finnes ulike grunner til at man gjennomfører skolereformer og innfører nye læreplanverk. En kombinasjon av økonomiske, politiske, samfunnsmessige og/eller faglig-pedagogiske faktorer er gjerne utslagsgivende for at myndighetene setter i gang et slikt arbeid (Gjone, 2003). Anna Sundback (2005) og Svein Sjøberg (2004) trekker også inn nasjonale og internasjonale utredninger som viktige motiver bak skolereformene. Eksempler kan være PISA (se f. eks. OECD, 2001; OECD, 2004), TIMSS (se f. eks. Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie, & Turmo, 2004) og nasjonale prøver (se f. eks. Utdanningsdirektoratet, 2007a).

3.3.1 Læreplanens ulike nivåer

Læreplanen kan bli delt inn i ulike nivåer eller typer. På 1970-tallet utviklet John I. Goodlad, ifølge Gunn Imsen (2006), et begrepsapparat som beskrev forløpet fra den overordnede læreplanideen til den virkeliggjorte læreplanen i klasserommet. Goodlads struktur hadde fem læreplannivåer: den ideologiske, den formelle, den oppfattede, den gjennomførte og den erfarte læreplanen. En annen inndeling finnes, ifølge Gjone (2003), i den internasjonale undersøkelsen TIMSS[11], hvor læreplanen ble delt inn i tre ulike nivåer. *Den intenderte læreplanen* var læreplanen som ble vedtatt av myndighetene. Læreplanen som ble tatt i bruk ble kalt *den implementerte læreplanen,* og den kunne være forskjellig fra den vedtatte læreplanen. Årsaken er at en læreplan, som tidligere nevnt, kan inneholde formuleringer som kan tolkes forskjellig av ulike grupper. Tolkningen blir blant annet gjort av lærere og lærebokforfattere. Det siste nivået ble kalt *den resulterte læreplanen* og omfatter det som eleven selv har fått med seg fra undervisningen (Gjone, 2003). Jeg velger å benytte meg av TIMSS sin inndeling av læreplanen fordi den er tilstrekkelig for å beskrive de ulike læreplannivåene jeg ønsker å ta for meg i masteroppgaven. Problemstillingen består i å undersøke sammenhengen mellom læreplanen i matematikk og oppgavene som blir gitt på

[11] TIMSS er en forkortelse for Third International Mathematics and Science Study.

eksamen. Jeg ønsker å undersøke intensjonene i læreplanen, i forhold til problemløsning, for å se om eksamensoppgavene støtter opp om dem. For å kunne gjøre det, må jeg analysere og tolke innholdet i læreplanen i matematikk. Min vurdering er at jeg undersøker den intenderte læreplanen i masteroppgaven. Til tross for at jeg må tolke innholdet i læreplanen, tar jeg ikke læreplanen i bruk.

I Norge krever opplæringsloven at lærere følger læreplanverket (Kunnskapsdepartementet, 1998). Forskning viser imidlertid at læreplanen betyr lite for undervisningen (Gjone, 2003; Kleve, 2007; Sundback, 2005). Bodil Kleve (2007) kom i sin doktoravhandling frem til at det ikke er læreplanen, men lærerens fagkunnskaper og undervisningskompetanse som avgjør hva slags undervisning elevene får. Hun studerte matematikklæreres tolkning og bruk av L97 i ungdomsskolen. Gjone (2003) og Sundback (2005) påpeker at læreplanens funksjon som styringsmiddel er kraftig overvurdert, og at lærerens bakgrunn, lærebøker og sentrale prøver har en viktigere rolle i arbeidet i skolen. I tillegg trekker Erkki Pehkonen (2003) inn lærerens matematikkrelaterte forestillinger som en faktor som påvirker undervisningen.

En studie av 63 norske klasser, gjennomført av Imsen (2003), viser at lærebøkene er det viktigste hjelpemiddelet når lærere på 10. trinn planlegger undervisning i matematikk. Læreplanen kommer imidlertid på andre plass, noe som tyder på at den også er viktig i planleggingsfasen, ifølge Imsen. Resultatet er noe i strid med Gjone og Sundback sin påstand, og min vurdering er at det trengs flere studier av sammenhengen mellom undervisning og læreplanverket.

3.4 Problemløsning i læreplanen

Matematikk som undervisningsfag ble nevnt for første gang i leseplanene (læreplanene) for 1604. Lærerne skulle da undervise i de fire regneartene, brøk, ligninger med en ukjent og geometri, og undervisningen foregikk på latin (Frøyland, 1965). Målet var at matematikkundervisningen skulle:

> gi et forkurs i logisk tenkning, som skulle supplere logikken i den latinske grammatikken. (Frøyland, 1965, s. 3)

Nesten 400 år senere, i mønsterplanen for grunnskolen 1987 (M87) kom problemløsning for første gang inn som et sentralt tema (Botten, 2003). Elevene skulle bruke matematikk som et verktøy for å løse praktiske problemer, og arbeidet i matematikk skulle bygge på og videreutvikle elevenes kreative og skapende evner (KUD, 1987). I det påfølgende læreplanverket, L97, var problemløsning ikke lenger et eget tema, men læreplanverket hadde fokus på problemer og situasjoner fra dagliglivet. Prosjektarbeid var en sentral arbeidsmetode (KUF, 1996a). Fra 2006 ble Kunnskapsløftet det gjeldende læreplanverket i Norge (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Jeg skal her presentere to norske læreplanverk, M87 og L97. Selv om jeg kun skal analysere eksamensoppgaver basert på L97, velger jeg å presentere M87. Årsaken er at problemløsning kom inn som sentralt tema for første gang i M87, og jeg ønsker å undersøke hvordan fokuset på problemløsning har endret seg fra M87 til L97. Resultatene fra undersøkelsen av L97 bruker jeg for å svare på mitt andre forskningsspørsmål som omhandler læreplanens fokus på problemløsning[12].

3.4.1 M87

Mønsterplanen for grunnskolen 1987 (M87) var en revidert utgave av den tidligere planen fra 1974 (M74) og avløste M74. M87 bestod av to hoveddeler, en generell del og en del med fagplaner. Lærestoffet var presentert for treårsperioder, og målene var svært generelle. I matematikk, norsk og engelsk ble det i tillegg laget veiledende årsplaner i form av hefter. Skolestyret, den enkelte skole og den enkelte lærer, skulle foreta valg og konkretiseringer av mønsterplanen lokalt ved å utarbeide lokale læreplaner og arbeidsplaner for undervisningen. På den måten skulle M87 være et styringsinstrument og et planleggingsgrunnlag for arbeidet i og utviklingen av grunnskolen (KUD, 1987).

Fagplanen for matematikk i M87 var inndelt i mål, lærestoff og progresjon, arbeidsmåter, læremidler og hovedemner og delemner. Totalt inneholdt fagplanen ti hovedemner, hvor problemløsning var et av dem. Hovedemnene skulle ikke bli betraktet

---

[12] Jeg velger å plassere analysen av L97 her, i stedet for i kapittel 5 der resultatene fra analysene av eksamensoppgavene er plassert. Årsaken er at jeg mener plasseringen gir den beste oppbygningen av masteroppgaven.

som separerte enheter, men var ment som en måte å strukturere lærestoffet på. Lærerne skulle legge til rette for at elevene opplevde helheten i faget (KUD, 1987). Ifølge Gjone (1994) og Alseth m. fl. (2003) var nytteaspektet dominerende i M87. Min mening er at det blant annet kommer frem i sitater som:

> Matematikk er et nødvendig redskap innenfor ulike områder av samfunnsliv, teknikk og vitenskap. (…) Vi trenger kunnskaper og ferdigheter i matematikk for å kunne løse mange oppgaver i dagliglivet og for å kunne ivareta personlige interesser og gjøremål. (KUD, 1987, s. 194)

Sitatet viser at matematikk skulle være et nyttefag. Ifølge Gjone (1994) viser nyinnførte hovedemner som prosent, måling og enheter og personlig økonomi og samfunnsøkonomi at nytteaspektet var sterkt.

3.4.2 Problemløsning i M87

Problemløsning var, som tidligere nevnt, for første gang tatt med som et eget hovedemne i læreplanen (Botten, 2003) og skulle være en del av all matematikkopplæring (KUD, 1987). Matematisk metode, som problemløsning ifølge M87 er et eksempel på, ble dermed sett på som en viktig del av opplæringen i matematikk (Grunnskolerådet, 1987). Ifølge Grunnskolerådet (1987) definerte M87 et problem som en oppgave en elev ikke har en kjent fremgangsmåte eller metode for å løse. Definisjonen trekker dermed, på lik linje med definisjonene som er presentert tidligere, inn det individrelaterte aspektet ved problemløsning. I løpet av grunnskolen ble fokuset utvidet fra oppgaver basert på egne erfaringer og kunnskaper til mer teoretiske problemer (KUD, 1987). Fagplanen i matematikk presenterte problemløsning som en prosess som bestod av fire ledd:

- Å formulere problemet
- Å analysere problemet og komme fram til en løsningsmetode
- Å foreta de nødvendige beregninger
- Å vurdere framgangsmåte og resultater (KUD, 1987, s. 196)

Min vurdering er at fremstillingen i M87 ligner mye på Polyas presentasjon av problemløsningsprosessen, som ble presentert tidligere. Polyas fire faser er som følger:

1) Forstå problemet, 2) Lage en plan, 3) Gjennomføre planen og 4) Se tilbake. Både M87 og Polya deler problemløsningsprosessen inn i fire faser/ledd med fokus på oppstart, gjennomføring og vurdering. Jeg finner imidlertid forskjeller mellom de to fremstillingene. I Polyas fremstilling er det en antakelse om at det allerede eksisterer et problem som problemløseren ønsker å løse. Første trinn blir dermed å forstå problemet. M87 har stort fokus på at elevene selv skal finne og formulere problemer, og derfor er første ledd i prosessen å formulere et problem. Tredje trinn er gjennomføring hos både Polya og M87. Slik jeg tolker det, har Polya et romsligere syn på selve gjennomføringen. Ifølge M87 består gjennomføringen i ”å foreta de nødvendige beregninger”, noe jeg forstår som regnetekniske oppgaver. Min videre tolkning er at problemene som elevene skal arbeide med skal kunne bli redusert til beregninger. Polya presenterer i stedet gjennomføringen som ”Gjennomføre planen”. Planen er en ide om hvordan elevene kan løse problemet.

Slik jeg vurderer det, er de fire trinnene som problemløsning består av, ifølge M87, svært lik en oppskrift i en kokebok. Presentasjonen som blir gitt i M87 (KUD, 1987) og av Grunnskolerådet (1987) gir inntrykk av elevene begynner med første ledd og fortsetter inntil de er ferdige med fjerde ledd.

3.4.3 L97

Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen (L97) ble innført i skoleåret 1997/1998 og avløste M87. Grunnskolen ble gjennom L97 utvidet fra å være 9-årig til å bli 10-årig. L97 bestod av tre hoveddeler, 1) en generell del, 2) prinsipper og retningslinjer for opplæringen i grunnskolen og 3) læreplaner for fagene. Lærestoffet var presentert på årsbasis, og målene svært detaljerte i forhold til i M87 (KUF, 1996a).

Læreplanen i matematikk i L97 var delt inn fire kapitler, fagets plass i skolen, arbeidsmåter i faget, strukturen i faget, samt mål og hovedmomenter. Totalt inneholdt læreplanen fem målområder i matematikk på ungdomstrinnet (8.-10. klasse):

1. Matematikk i dagliglivet
2. Tall og algebra (ble kalt ”Tall” fra 1.-7. klasse)
3. Geometri (ble kalt ”Rom og form” i 1.-4. klasse)

4. Behandling av data (kun 5.-10. klasse)
5. Grafer og funksjoner (kun 8.-10. klasse)

Antall målområder var dermed halvert og omformulert i forhold til M87.

Gjone (2003) og Alseth m. fl. (2003) hevder at nytteperspektivet var dominerende i læreplanen i matematikk i L97, noe jeg er enig i. Matematikk blir presentert som et redskapsfag, blant annet gjennom sitater som:

> Opplæringen i faget har som mål at matematikk blir et redskap elevene kan ha nytte av på skolen, i fritiden og i arbeids- og samfunnsliv (KUF, 1996a, s. 158)

L97 la opp til at det skulle være en nær kobling mellom matematikk i og utenfor skolen, blant annet gjennom det nye målområdet "Matematikk i dagliglivet". Skolematematikken skulle vise hvordan elevene kunne dra nytte av kunnskaper i matematikk i oppgaver og problemer de kunne møte i dagliglivet. Dannelsesperspektivet var i noe grad til stede, men spesielt hovedmomentene i matematikk fokuserte først og fremst på nytte.

3.4.4 Problemløsning i L97

I L97 var problemløsning ikke lenger et eget hovedemne, og termen brukes kun en gang i læreplanen i matematikk. Fokuset var rettet mot utforskende aktiviteter, og elevene skulle finne sammenhenger, finne mønstre og løse problemer, både alene og i samarbeid med andre (KUF, 1996a). Viktige mål blir å oppdage, analysere, reflektere og vurdere (Alseth, et al., 2003). Min vurdering er at problemløsning, slik jeg har definert det, er en type utforskende aktivitet. Problemløsning innebærer at elevene må utforske en ukjent situasjon eller sammenheng i matematikk, og de har ingen kjente algoritmer eller svar tilgjengelig for å løse problemet. Andre typer utforskende aktiviteter, mener jeg, er for eksempel prosjektarbeid, undersøkelser og eksperimenter. Matematikk ble i L97 sett på som en prosess, der elevene skulle være aktive deltakere. Jeg mener at det kommer tydelig fram ved at man i hvert hovedmoment starter med følgende:

> I opplæringen skal *elevene*… (KUF, 1996a, s. 158-170, min fremhevelse)

Selv om ikke problemløsning var et eget hovedemne, finner jeg hele åtte hovedmomenter med fokus på problemer for elever fra 8.-10. klasse (samme alder). Her følger noen eksempler fra 10. klasse:

> I opplæringen skal elevene:
>
> - anvende matematikk på spørsmål og problemer innenfor natur- og ressursforvaltning, f. eks, med utgangspunkt i miljø og forurensing, forbruk, energiforsyning og -bruk, trafikkspørsmål og kommunikasjon (fra "Matematikk i dagliglivet" i 10. klasse)
> - arbeide med sammensatte problemer og oppgaver i realistiske sammenhenger, f. eks. i et prosjekt (fra "Matematikk i dagliglivet" i 10. klasse)
> - arbeide videre med å tolke, beskrive og vurdere situasjoner og løse problemer ved hjelp av tall og regnemetoder, formler og likninger (fra "Tall og algebra" i 10. klasse) (KUF, 1996a, s. 166-170)

Elevene skal arbeide med problemer knyttet til dagliglivet og realistiske sammenhenger. Min vurdering er at problemløsning i L97 er mer omfattende enn problemløsning i M87. Problemløsning i M87 var begrenset til en prosess bestående av fire trinn, nesten som en oppskrift. I L97 er problemløsning i større grad en aktivitet hvor elevene skal være kreative og bruke egen fantasi, også i forhold til selve problemløsningsprosessen.

> Opplæringen i faget har som mål
>
> - at elevene stimuleres til å bruke sin fantasi, sine ressurser og sine kunnskaper til å finne løsningsmetoder og -alternativer gjennom undersøkende og problemløsende aktivitet (..) (KUF, 1996a, s. 158)

Elevene skal løse problemer ved å bruke en kombinasjon av fantasier, ressurser og kunnskaper. Læreplanen legger ingen andre føringer for hvordan elevene skal løse problemer, noe jeg mener M87 gjorde ved å presentere problemløsning som en prosess bestående av fire ledd. L97 trekker inn formulering av problemer i to hovedmomenter for ungdomstrinnet.

I opplæringen skal elevene:

- registrere og formulere problemer og oppgaver knyttet til nærmiljø og samfunn, arbeid og fritid, og få erfaringer med å velge og bruke hensiktsmessige framgangsmåter og hjelpemidler og vurdere løsninger (fra ”Matematikk i dagliglivet” i 8. klasse)
- registrere, formulere og arbeide med problemer og oppgaver knyttet til samfunnslivet, f.eks. sysselsetting, helse og ernæring, befolkningsutvikling og valgmetoder (fra ”Matematikk i dagliglivet” i 9. klasse) (KUF, 1996a, s. 166-168)

Som det fremgår, er de to sitatene begge hentet fra målområdet ”Matematikk i dagliglivet”, og elevene skal formulere problemer som er knyttet til samfunn, arbeid og fritid. Jeg gjør oppmerksom på at L97 ikke definerer begrepet problem. Med bakgrunn i presentasjonen og diskusjonen av ulike definisjoner av et problem, som viste at alle definisjonene var individrelaterte (se delkapittel 3.1.1), mener jeg det er grunn til å tro at det samme gjelder for L97, uten at det er tydeliggjort.

Min vurdering er at fokuset på utforskende aktiviteter er mest fremtredende i innledningen, felles mål for faget og målene som gjelder for småskole-, mellom- og ungdomstrinnet. I hovedmomentene som omhandler hvert enkelt trinn, er det lite fokus på utforskende aktiviteter. På 10. trinn finner jeg for eksempel følgende hovedmomenter som i større eller mindre grad omhandler utforskende aktiviteter:

I opplæringen skal elevene:

- *vurdere* bruk av måleinstrumenter og *vurdere* måleusikkerhet
- anvende matematikk på spørsmål og *problemer* innenfor natur- og ressursforvaltning, f.eks. med utgangspunkt i miljø og forurensning, forbruk, energiforsyning og -bruk, trafikkspørsmål og kommunikasjon
- arbeide med sammensatte *problemer* og oppgaver i realistiske sammenhenger, f.eks. i et *prosjekt*
- arbeide videre med å *tolke*, beskrive, *vurdere* situasjoner og løse *problemer* ved hjelp av tall og regnemetoder, formler og likninger

- arbeide mer med egenskaper ved figurer, former og mønstre, spesielt lage og *undersøke* regulære og semiregulære mønstre i planet. Bli kjent med de regulære romfigurene og gjerne noen semiregulære romfigurer
- ordne og gruppere data. Finne, bruke og *vurdere* typetall, median og gjennomsnitt som hensiktsmessige mål for sentraltendens, og variasjonsbredde og eventuelt andre mål for spredning
- *tolke* resultater fra statistiske beregninger, *tolke* grafer og diagrammer og *vurdere* dem kritisk
- gjøre erfaringer med varierte uttrykksformer for funksjoner og *undersøke* funksjoners egenskaper (KUF, 1996a, s. 169-170, mine fremhevelser)

Åtte av 26 hovedmomenter på 10. trinn nevner ord som jeg mener kan knyttes direkte til utforskende aktiviteter, for eksempel vurdere, tolke, undersøke, problemer og prosjekt (se fremhevelser i sitat). I flere av hovedmomentene er imidlertid utforsking kun en liten del av det totale innholdet i momentet. Min tolkning av L97 er at innledningen, felles mål for faget og mål for småskole-, mellom- og ungdomstrinnet fungerer som en overordnet struktur som skal inngå i alle hovedmomentene. På den måten skal utforskende aktiviteter være en del av all matematikkundervisning, uavhengig av om de enkelte hovedmomentene har fokus på utforsking. Min vurdering er derfor at fokuset på utforskende aktiviteter, deriblant problemløsning, var stort i L97.

3.5 Vurdering i matematikk

I løpet av 1900-tallet økte bruken av elevtesting i skolen drastisk, og i dag er fokuset på standardiserte tester i matematikk stort. Resultatene fra testene blir ofte offentliggjort, og på den måten er det ikke bare elevene som vurderes, men også lærere, skoler og land (Heuvel-Panhuizen & Becker, 2003). Ifølge Marja van den Heuvel-Panhuizen og Jerry Becker (2003) er en konsekvens av fokuset på standardiserte tester at ”teaching to the test” (s. 690) blir vanligere. Målet med undervisningen blir at elevene skal kunne vise hva de vet på testen. Heuvel-Panhuizen og Becker presenterer et eksempel på den nære og sterke sammenhengen mellom vurdering og undervisning. Lærerne endrer matematikkundervisningen for å gjøre den bedre tilpasset de standardiserte testene. I følgende delkapittel skal jeg ta for meg to generelle former for vurdering, underveis- og sluttvurdering, og den tilbakevirkende effekten vurdering kan ha på undervisningen.

3.5.1 Underveis- og sluttvurdering

Vurdering har ikke en fremtredende plass i L97, men læreplanverket presiserer at vurderingen skal være målrelatert (Gjone, 2000). Videre skal vurderingen informere andre utdanningsinstitusjoner og arbeidslivet om kompetansen eleven har oppnådd etter gjennomført opplæring (KUF, 1996a). L97 bruker ingen bestemte begrep for ulike typer vurdering[13]. Læreplanverket spesifiserer kun at det er forskjell på vurdering med og uten karakter på ungdomstrinnet. Den jevnlige individuelle vurderingen skal være uten karakter. Læreren skal legge vekt på individuelle forutsetninger, arbeidsprosesser og arbeidsresultat, alt med utgangspunkt i læreplanmålene. Dessuten skal læreren gi veiledning i hvordan eleven kan arbeide videre. Vurderingen med karakter skal ta utgangspunkt i mål og innhold i faget, men læreren skal også se vurderingen i sammenheng med vurderingen uten karakter (KUF, 1996a). Ifølge KUF (1996b) er vurdering uten karakter i L97 en form for uformell vurdering. *Uformell vurdering* er her den løpende elevvurderingen uten karakter. Ifølge L97 er *formell vurdering* definert som vurdering med karakter[14].

Med nyere språkbruk er det vanlig å dele vurdering inn i to generelle former, underveis- og sluttvurdering (Gjone, 2000), og inndelingen benyttes i det gjeldende læreplanverket, Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2007b). *Underveisvurdering* skjer i løpet av undervisningen og kan være med eller uten karakterer. Hensikten med underveisvurderingen er å fremme læring og utvikling, i tillegg til å gi grunnlag for tilpasset opplæring. I de tilfellene hvor underveisvurdering blir gitt med karakter, skal vurderingen suppleres med begrunnelse og veiledning om hvordan eleven kan bli bedre i faget (Utdanningsdirektoratet, 2007b). Eksempler på underveisvurdering kan være

[13] For eksempel formell/uformell, formativ/summativ eller underveis-/sluttvurdering.

[14] For å likestille uformell og formell vurdering benytter L97 ”vurdering uten karakter” i stedet for uformell vurdering og ”vurdering med karakter” for formell vurdering. Myndighetene hadde i tillegg et ønske om å understreke verdien av den uformelle vurderingen (KUF, 1996b).

terminkarakterer, egenvurdering, kartleggingstester og mappevurdering (UFD, 2004). *Sluttvurdering* blir derimot gjennomført i etterkant av en undervisningsperiode for å vurdere elevenes endelige kompetanse, og eventuelt sette en karakter (Utdanningsdirektoratet, 2007b). Eksempler på sluttvurdering er eksamen og standpunktvurdering. Standpunktvurderingen i matematikk skal gjenspeile elevens måloppnåelse i forhold til alle kompetansemålene, og vurderingen fremstår som en karakter som settes av matematikklæreren (Utdanningsdirektoratet, 2007b).

Ifølge Utdannings- og forskningsdepartementet (2004) skal utformingen av eksamen i matematikk være på en slik måte at den i størst mulig grad tester elevenes måloppnåelse[15], i forhold til målene i læreplanen i matematikk. Det betyr at eleven på eksamen skal stilles overfor utfordringer som han skal løse eller svare på (Utdanningsdirektoratet, 2007c). Oppgavene som blir gitt på eksamen må imidlertid bli avgrenset slik at elevene har mulighet til å gjennomføre eksamen på den tiden som er til rådighet. Det fører til at man på eksamen tester færre læreplanmål enn standpunktvurderingen i faget (Utdanningsdirektoratet, 2007c). Jeg velger å kalle området som består av målene i læreplanen som testes på eksamen for *testområdet*. Min vurdering er at testområdet er et uttrykk for den implementerte læreplanen. Myndighetene som konstruerer matematikkeksamen tolker og tar i bruk læreplanen, og den vil da være forskjellig fra den intenderte læreplanen.

Utdanningsdirektoratet definerer her kompetanse på følgende måte:

> Kompetanse forstås som det man gjør og får til i møte med utfordringer (Utdanningsdirektoratet, 2007c, s. 3).

Ifølge Claus Michelsen (2001) virker eksamenskrav og eksamensformer tilbake på det som elever og lærere ser på som sentralt i undervisningen. Han hevder at dersom man ønsker å utvikle undervisningens praksis, så må man også utvikle nye evalueringsformer som støtter opp om den ønskede praksisen. Påstanden støttes av Niss og Jensen (2002). De poengterer at den tilbakevirkende effekten har potensial til å være et nyttig

---

[15] Tilsvarende gjelder i det gjeldende læreplanverket, Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2007c), som i stedet for betegnelsene måloppnåelse og læreplanmål bruker kompetanse og kompetansemål.

instrument for å endre og utvikle undervisningspraksis, men det fordrer at en er oppmerksom på hvordan evalueringen gjøres. Videre mener han at det ikke er nok å bruke tid på å utvikle kompetansene man ønsker at elevene skal utvikle i undervisningssituasjonen. De ønskede kompetansene må også inngå i evalueringen.

Som nevnt, har Wilson (2007) gjennomført en litteraturstudie for å finne ut hvilken påvirkning ”prøver hvor utfallet er viktig” (high-stakes tests) har på undervisningspraksisen. Studien hennes viser at lærere bruker mest tid på oppgavetyper som gis på slike prøver. Oppgavetypene som blir gitt på slike prøver kan variere. Eksempler på slike er åpne oppgaver og avkryssingsoppgaver (Wilson, 2007). Matematikkeksamen er en prøve med høy innsats. Den blir gjennomført på samme måte over hele landet og har store konsekvenser for deltakerne, med tanke på videre skolegang, arbeidsmuligheter og lignende. En konsekvens av resultatene fra Michelsen (2001), Niss og Jensen (2002) og Wilson (2007) sine studier, slik jeg vurderer det, er at dersom myndighetene ønsker at lærere skal ta i bruk problemløsning i matematikkundervisningen, må de lage problemløsningsoppgaver på eksamen.

Kapittel 4 METODE

Problemstillingen min er: Hvordan er sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk i grunnskolen og oppgavene som blir gitt på eksamen? For å svare på problemstillingen, har jeg sett nærmere på læreplanverket L97 og tilhørende eksamensoppgaver. Følgende tre forskningsspørsmål fungerte som utgangspunkt for undersøkelsen:

1. Utfordrer eksamensoppgavene i matematikk elevene til kreativ resonnering?
2. Hvordan er fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk?
3. Er det samsvar mellom eksamensoppgavene og fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk?

For å undersøke det første forskningsspørsmålet, brukte jeg Boesens (2006) analyseverktøy. Målet med analyseverktøyet er å skille mellom eksamensoppgaver som krever imiterende og kreativ resonnering. Det andre forskningsspørsmålet undersøkte jeg ved å ta for meg læreplanen i matematikk. Jeg tolket og analyserte læreplanen med fokus på problemløsning. Resultatene fra undersøkelsen ble presentert i delkapittel 3.4. I det tredje forskningsspørsmålet sammenfattet og drøftet jeg resultatene fra de to første forskningsspørsmålene. I alle tre spørsmålene var jeg instrumentet for undersøkelsen. Det var jeg som tolket, analyserte, drøftet og vurderte datamaterialet. Kvaliteten på analysene avhenger derfor i stor grad av kvaliteten på meg som forsker (Robson, 2002).

Jeg gjennomførte to kvalitative undersøkelser, en undersøkelse av læreplanen i matematikk fra L97 og en av eksamensoppgaver basert på L97. Kvalitative metoder brukes i forskning som skal gi dybdeinformasjon av et bestemt program, en bestemt praksis eller en bestemt situasjon, og målet med forskningen er å prøve å forstå eller tolke fenomenet. Kjennetegn på kvalitative studier er kompleksitet, utforsking og oppdagelse. Forskeren begynner med spesifikke observasjoner og lar analysen springe ut fra datamaterialet mens studien pågår (Mertens, 2005). Først og fremst valgte jeg å bruke en kvalitativ metode i studien på grunn av forskningsspørsmålenes natur. Målet var å undersøke sammenhengen mellom læreplanen og eksamen, og til det trengs det dybdeinformasjon. Ifølge Donna M. Mertens (2005) er kvalitative metoder hensiktsmessige for slike studier.

I studien min utførte jeg en dokumentanalyse hvor læreplandokumentene og eksamensoppgaver var i fokus. Fordelen med dokumentanalyse er at forskeren kan observere uten å bli observert (Robson, 2002). Det er ingen fare for å påvirke datamaterialet. Derimot kan forskerens forforståelse (bias) virke inn på analysene. *Forforståelse* er alt forskeren tar med seg inn i studien, for eksempel antakelser og forutinntatte meninger (Robson, 2002). Jeg har en antakelse om at kun en liten andel av eksamensoppgavene krever kreativ resonnering. Siden jeg var elev i grunnskolen da L97 var det gjeldende læreplanverket, er det også grunn til å tro at det kan påvirke min analyse av læreplanverket. Som forsker, bør jeg derfor gjøre rede for alle trinnene i tolkningsprosessen, og aldri ta det som en selvfølge at en bestemt tolkning kan gjøres ut i fra de dataene jeg arbeider med. Det bør hele tiden være mulig å følge hele prosessen fra tolkningen tilbake til dataene (Robson, 2002). I analysen av L97 gjorde jeg det ved å presentere sitater fra læreplanen i matematikk og hvordan jeg gjorde mine tolkninger ut i fra dem. I presentasjonen av resultatene fra analysen av eksamensoppgavene i det etterfølgende kapittelet, gir jeg flere eksempler på hvordan jeg analyserte ulike eksamensoppgaver (se kapittel 5). På den måten kan leseren selv avgjøre om han/hun er enige i tolkningene og vurderingene mine.

Siden dokumentene jeg analyserte eksisterer i permanent form, vil det være enkelt å analysere dokumentene på nytt. På den måten kan andre forskere undersøke troverdigheten til studien eller gjøre studien på nytt, om ønskelig. Muligheten for å gjennomføre langtidsstudier, for eksempel av eksamensoppgaver fra 1970 og fram til i dag, er også tilstede. Det kan imidlertid oppstå problemer i analyseprosessen dersom dokumentene som er tilgjengelig ikke er fullstendige (Robson, 2002). I min studie har ikke det vært et problem siden tilgangen på komplette eksamensoppgaver basert på L97 er god.

4.1 UTVALG

Utvalget mitt bestod av en læreplan i matematikk, i tillegg til tre eksamenssett og to lærebøker basert på læreplanen. Når man undersøker dokumenter, er det viktig å forstå at slikt datamateriale må behandles med en forståelse av tid, kontekst og hensikten med å lage dokumentet (Mertens, 2005). Tidligere i oppgaven presenterte jeg hensikten med læreplaner. Jeg presenterte også læreplanen i matematikk fra L97 med tanke på tid og kontekst. Videre har jeg tatt for meg hensikten med eksamen i matematikk, og jeg har vært kort inne på når eksamen blir avholdt. Senere i dette delkapittelet går jeg også nærmere inn på tid og kontekst med hensyn på eksamen i matematikk (se delkapittel 4.1.3).

Ved å gjennomføre medlemssjekk (member check) er det mulig å få flere perspektiver på tolkningen av datamaterialet (Mertens, 2005). Jeg har ikke gjort det i studien min, men muligheten for å sammenligne tolkningen min med andres tolkninger er til stede. Myndighetene, lærere, lærebokforfattere eller matematikkdidaktikere kan være potensielle kandidater for en slik sammenligning. For å støtte opp om tolkningene mine av læreplanen i matematikk, har jeg imidlertid henvist til andre forskeres resultater i analysen av den.

I studien min baserte jeg analysen av eksamensoppgavene på innholdet i lærebøker. For at jeg skulle kunne si om en oppgave er en problemløsningsoppgave for en elev, måtte jeg se på sammenhengen mellom oppgaven og eleven som oppgaven er laget for (Palm, et al., 2005). Jeg har ikke mulighet til å ta for meg alle kunnskaper og erfaringer en elev har, og analysen må derfor begrenses. Siden lærebøker utgjør en stor del av elevens erfaringsgrunnlag, både teoretisk og gjennom oppgaver, valgte jeg å begrense meg til å se på dem. Med lærebøker mener jeg teori- og oppgavebøkene elevene bruker i matematikkundervisning. Valget var i tillegg nødvendig for at jeg skulle kunne benytte analyseverktøyet til Boesen (2006).

Det er viktig å fremheve at jeg undersøkte en gruppe elever, ikke enkeltelever. Analysene baserte seg på at alle elevene som har brukt de aktuelle lærebøkene har noe til felles, for eksempel kjennskap til teori, svar og algoritmer. Klassifiseringene som ble gjort forutsetter at elevene har sett på alle eksemplene, løst alle oppgavene og lest all teori i minst en av de to lærebøkene.

I det påfølgende delkapittelet gjør jeg rede vurderingskonteksten i den norske grunnskolen. De to etterfølgende delkapitlene inneholder en grundig presentasjon av utvalget i studien, i forhold til analysen av eksamensoppgavene.

4.1.1 Skolesystemet i Norge

I Norge er 10-årig grunnskole obligatorisk for alle elever. Barn og unge har rett og plikt til å gå i grunnskolen dersom de ikke får tilsvarende utdanning på annen måte (Kunnskapsdepartementet, 2006). Grunnskolen er delt inn i et barnetrinn (1.-7. årstrinn) og et ungdomstrinn (8.-10. årstrinn).

Alle elever har krav på vurdering. På barnetrinnet får den enkelte elev vurdering uten karakter. Eleven har imidlertid krav på en beskrivende vurdering av hvordan han ligger an i forhold til målene i læreplanen. På ungdomstrinnet skal eleven ha vurdering uten karakter, på lik linje som barnetrinnet. Eleven skal også ha vurdering med karakter i alle fag, samt i orden og oppførsel. Eleven får terminkarakter i alle fag underveis i utdanningsløpet og standpunktkarakter når opplæringen er avsluttet. I tillegg får eleven karakter i fag de blir trukket ut til eksamen i. Eleven kan bli trukket ut til eksamen i alle fag som avsluttes. Departementet avgjør hvor mange eksamener det skal være på 10. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2006)

Det norske karaktersystemet for fag består av seks nivåer. Skalaen går fra 1 til 6 (UFD, 2004). Karakteren 1 utrykker at eleven har svært lav måloppnåelse i faget, mens karakteren 6 utrykker at eleven har utmerket måloppnåelse i faget. Det blir kun gitt hele karakterer[16].

[16] Tilsvarende karaktersystem gjelder i Kunnskapsløftet. Måloppnåelse er da erstattet med kompetanse (Kunnskapsdepartementet, 2006).

4.1.2 Mest brukte lærebøker

Tidsbegrensningen gjorde at jeg ikke kunne ta for meg alle lærebøkene som ble brukt på 10. trinn under L97 i analysen. Jeg valgte derfor å begrense meg til de to mest brukte lærebøkene i Norge. Dessverre ønsket ikke forlagene å oppgi statistikk for salg av lærebøker. For å få en pekepinn på hvilke lærebøker som var mest brukt, valgte jeg å ringe til alle ungdomsskolene i Trondheim kommune og spørre hvilken lærebok de hadde brukt på 10. trinn under L97. Totalt deltok alle de 18 ungdomsskolene i Trondheim kommune i undersøkelsen. Resultatet viste at Matematikk åtte-ni-ti (Martinsen, Oldervoll, & Pedersen, 1999; Martinsen, Oldervoll, Pedersen, & Enger, 1999) og Mega (Gulbrandsen & Melhus, 1999b, 1999c) var mest brukt på 10. trinn i Trondheim, og to tredjedeler hadde brukt en av de to lærebøkene (se tabell 1). Det finnes en alternativ grunnbok til Matematikk åtte-ni-ti, beregnet på elever som trenger et enklere opplegg enn andre elever. Jeg har antatt at de fleste elevene har brukt den vanlige grunnboken og kun tatt den med i analysen.

Tabell 1: Oversikt over antall skoler som benyttet forskjellige lærebøker under L97

Forlag	Navn på lærebok	Antall skoler
J. W. Cappelens	Matematikk åtte-ni-ti	7
NKS	Mega	5
Elektronisk undervisningsforlag	Grunntall	3
Cappelen	Faktor	2
Gyldendal	Nye fakta	1

Valget om å begrense analysen til de to mest brukte lærebøkene i matematikk i Trondheim kommune gjør at jeg ikke kan generalisere resultatene fra analysen til å gjelde hele Norge. Men resultatene fra studien er gyldige for alle elever som har benyttet Matematikk åtte-ni-ti eller Mega på ungdomsstrinnet, enten de er fra Trondheim kommune eller andre deler av landet. Årsaken er at analysen ikke tar hensyn til lokale variabler, for eksempel skole- eller lokalmiljøet, som kun gjelder for Trondheim kommune. Resultatene fra analysen viser at to av eksamenssettene inneholder en oppgave jeg ikke klarte å analysere på grunn av forskjell i lærebøkene, mens det tredje eksamensettet inneholder tre oppgaver. Jeg mener det indikerer at bøkene er relativt like med tanke på de tre faktorene, teori, oppgaver og eksempler. Dersom en kan vise at andre lærebøker som er tilpasset L97, ligner på de to jeg har brukt i analysen, med hensyn på de tre faktorene vil, det være mulig å utvide resultatene til å gjelde for elever som har brukt de aktuelle lærebøkene.

Da jeg begynte å analysere eksamensoppgavene, viste det seg at det ikke var mulig å kun vurdere lærebøkene fra 10. trinn. Årsaken er at en stor del av eksamensoppgavene var knyttet til temaer som elevene hadde hatt tidligere på ungdomsstrinnet, og av og til på barnetrinnet. Jeg valgte derfor å analysere lærebøkene fra 8. og 9. trinn i tillegg. Jeg har ikke undersøkt om Matematikk åtte-ni-ti og Mega[17] var mest brukt på 8. og 9. trinn, men egen erfaring fra skolen tilsier at skolene velger å benytte samme lærebokserie for alle trinnene på ungdomsskolen. Tabell 2 viser en oversikt over alle lærebøkene som er benyttet i analysen.

Tabell 2: Oversikt over lærebøker som er med i analysen

Forlag	Navn på lærebok	Nummer
J. W. Cappelens	Matematikk åtte-ni-ti	10
J. W. Cappelens	Matematikk åtte-ni-ti	9
J. W. Cappelens	Matematikk åtte-ni-ti	8
NKS	Mega	10
NKS	Mega	9
NKS	Mega	8

4.1.3 Eksamenssett

Elevene besvarte avgangsprøvene individuelt, og de kunne bruke elevbøkene[18] og lommeregnerne sine på alle eksamensoppgavene. Hvert eksamenssett var delt inn i tre deler, i tillegg til et informasjonshefte. Heftet fikk elevene utdelt to dager før

[17] Referanser for Matematikk åtte-ni-ti: (Martinsen, Oldervoll, & Pedersen, 1997a, 1997b, 1998a, 1998b, 1999; Martinsen, Oldervoll, Pedersen, et al., 1999). Referanser for Mega: (Gulbrandsen & Melhus, 1997a, 1997b, 1998, 1999a, 1999b, 1999c)

[18] Elevbøkene er elevenes egenlagde matematikkbøker. Det er ingen begrensninger på hva elevbøkene kan inneholde. Noen eksempler er regler, metoder, figurer, anvendelser, teori og eksempler (Eksamenssekretariatet, 1999).

eksamensdagen. På eksamensdagen hadde elevene fem timer til å besvare de gitte oppgavene. Elevene skulle fylle inn svarene fra del 1 direkte i oppgavearket, mens oppgavene i del 2 og 3 ble skrevet på egne ark. Elevene kunne i noen tilfeller velge mellom flere ulike oppgaver. Det fører til at eleven leverer inn færre oppgaver enn de som inngår i klassifiseringen.

Jeg har analysert alle oppgavene i eksamenssettene fra 2000, 2003 og 2005. Eksamenssettene ble valgt tilfeldig blant de skriftlige avgangsprøvene i matematikk som ble avholdt under L97[19]. Totalt er 190 eksamensoppgaver analysert. Jeg gjør oppmerksom på at tallet 190 refererer til konkrete oppdrag som elevene fikk på eksamen, og ikke til antall oppgaver med nummer foran. Noen av oppgavene med nummer foran inneholdt flere oppdrag. For eksempel b) i oppgave 2D fra eksamen 2005 hvor elevene først skal rotere en figur og deretter navngi den.

4.2 ANALYSE

Jeg har valgt å bruke Boesen (2006) sitt analyseverktøy for klassifisering av oppgaver. Målet med analysen er å skille mellom oppgaver som krever imiterende og kreativ resonnering. Ifølge Boesen (2006) og Palm m. fl. (2005) er typen resonnering elever må bruke for å løse en oppgave avhengig av deres kunnskaper og erfaringer. Dersom elever kjenner til Pytagoras setning, vet lengden til to av sidene i en rettvinklet trekant og skal finne lengden til den tredje, kan elevene løse en slik oppgave ved bruk av algoritmisk resonnering. Elever som ikke kjenner til Pytagoras setning eller en annen algoritme for å finne lengden av den tredje siden i en rettvinklet trekant, vil trenge kreativ resonnering for å løse den samme oppgaven. For at jeg skal kunne si om en oppgave er en problemløsningsoppgave for elever på 10. trinn, må jeg derfor se på sammenhengen mellom oppgaven og elevene som oppgaven er laget for (Palm, et al., 2005). Tidligere i oppgaven gjorde jeg rede for utvalget undersøkelsen baserer seg på. Som nevnt, valgte jeg å ta for meg de to mest brukte lærebøkene på 10. trinn i Trondheim.

[19] Avgangsprøvene ble avholdt etter L97 i perioden 1997 til 2007, ifølge Internettforlaget (2009).

4.2.1 Analyseprosedyre

Målet med analysen av lærebøker og eksamensoppgaver er å avgjøre om det er mulig, og sannsynlig, at elevene kan løse en eksamensoppgaveoppgave ved bruk av minnebasert resonnering (MR), algoritmisk resonnering (AR) eller en annen type imiterende resonnering, eller om kreativ resonnering (KR) er nødvendig. Elevene skal ikke ha mulighet til å løse eksamensoppgaven med mindre kreativ resonnering enn hva analysen viser at de trenger. Her er MR og AR definert til å være mindre kreativ enn lokal kreativ resonnering (LKR), som igjen er mindre kreativ enn global kreativ resonnering (GKR). Problemer krever, som nevnt, bruk av kreativ resonnering (Boesen, 2006; Palm, et al., 2005). Palm m. fl. (2005) hevder at dersom en elev skal kunne løse en eksamensoppgave ved bruk av minnebasert eller algoritmisk resonnering må to kriterier være tilfredsstilt: 1) Eleven må ha møtt på en passende algoritme eller fakta i læreboka et visst antall ganger, 2) Eksamensoppgaven må være slik at eleven kan relatere den til oppgaver og eksempler i læreboka som kan bli løst ved bruk av den samme algoritmen eller fakta som eksamensoppgaven

Analyseprosedyren består av følgende trinn:

A. Eksamensoppgaven
    1. Svar og løsninger
       Identifisering av svar eller algoritmer som kan løse oppgaven
    2. Andre egenskaper
       Beskrive oppgaven ved hjelp av oppgavevariablene[20]

B. Lærebøkene
    1. Svar og løsninger
        a. Gjennomgang av lærebøkene for å lete etter oppgaver og eksempler som kan bli løst med samme svar eller algoritme som eksamensoppgaven

[20] Jeg forklarer hva jeg mener med oppgavevariabler nedenfor.

b. Lete i teorien i lærebøkene for å finne deler som kan inneholde svar eller algoritme, for eksempel regler, teoremer, fakta osv.

2. Andre egenskaper
   a. Gjennomgang av lærebøkene for å lete etter oppgaver og eksempler som ligner på eksamensoppgaven med hensyn på oppgavevariablene
   b. Lete i teorien i lærebøkene etter informasjon som er nært relatert til eksamensoppgaven med hensyn på oppgavevariablene

C. Konklusjon og argumentasjon for en bestemt resonneringstype

Jeg valgte å gruppere de fem trinnene (A1, A2, B1, B2, C) i analyseprosedyren i tre hovedtrinn (A, B, C), mens Palm m. fl. (2005, s. 11-12) har de fem trinnene stående enkeltvis. Målet har vært å gjøre inndelingen mer oversiktlig, og tydeliggjøre hva som er fokusområdet for analysen i de ulike trinnene.

Oppgavevariablene blir brukt for å sammenligne egenskapene til eksamensoppgaven med egenskapene til teorien, oppgavene og eksemplene i lærebøkene. En eksamensoppgave er definert som:

> an instruction or question that requires a student response under certain conditions and specific rules (Palm, et al., 2005, s. 13)

En eksamensoppgave er en instruksjon eller et spørsmål som krever en respons fra elevene. Målet med sammenligningen er å avgjøre om det er likheter, mellom eksamensoppgaven og eksempler, oppgaver og teori som elevene har møtt i læreboka. Dersom jeg finner likheter, kan det være nok til at elevene klarer å relatere eksamensoppgaven til kjente algoritmer eller fakta (Palm, et al., 2005). Palm m. fl. (2005) argumenterer for at det eksisterer seks oppgavevariabler som er viktige når man skal se på likheter mellom eksamensoppgaver og informasjon i lærebøker. Oppgavevariablene er som følger:

1. Oppdrag
2. Eksplisitt informasjon om situasjonen
3. Representasjoner

4. Språklige egenskaper
5. Eksplisitt formulerte hint
6. Responsformat

Jeg kommer her til å gi en kort presentasjon av oppgavevariablene. En mer inngående presentasjon og begrunnelser for hvorfor de ulike variablene er valgt ut finnes i Palm m. fl. (2005).

1) *Oppdrag.* Hvis elevene oppfatter oppdraget i en eksamensoppgave som tilsvarende oppgaver eller eksempler i læreboka som kan bli løst med en bestemt algoritme eller fakta, kan de konkludere med at eksamensoppgaven er mulig å løse med samme algoritme eller fakta. Et oppdrag i en eksamensoppgave forteller hva elevene skal gjøre. Oppdraget kan for eksempel være et spørsmål eller en instruksjon. Eksempler på oppdrag er ”løs ligningen”, ”fyll ut tabellen” og ”tegn inn alle symmetriaksene i mønsteret”.

2) *Eksplisitt informasjon om situasjonen*. En eksamensoppgave inneholder ofte en beskrivelse av en situasjon. Informasjonen kan være om matematiske komponenter eller en virkelig hendelse. Dersom informasjon om matematiske komponenter er oppgitt i oppgaven og elevene har sett lignende matematiske komponenter med tilhørende algoritme eller fakta beskrevet i læreboka, kan elevene konkludere at de kan bruke samme algoritme eller fakta for å løse eksamensoppgaven. Et eksempel er en oppgave hvor strekning og tid er oppgitt, og elevene har sett at formelen fart=strekning/tid løser oppgaven. Det samme gjelder dersom eksamensoppgaven inneholder informasjon om en virkelig hendelse, og elevene har sett lignende informasjon i oppgaver eller eksempler i læreboka. Hvis oppgavene og eksemplene i læreboka er mulig å løse med en bestemt løsningsmetode, kan elevene konkludere at eksamensoppgaven også kan bli løst ved bruk av løsningsmetoden. For eksempel en person som har fått rabatt på en vare han skal kjøpe.

3) *Representasjoner*. Situasjonen i en eksamensoppgave kan bli presentert ved hjelp av ulike representasjoner. Eksempler kan være bilder, symboler, tabeller, tekst eller grafer. I noen tilfeller kan representasjoner gjøre det enklere for elevene å relatere

eksamensoppgaven til lignende eksempler og oppgaver i læreboka, spesielt dersom komponentene er presentert på samme måte i eksamensoppgaven og i læreboka. Hvis ikke, kan representasjonene gjøre det vanskeligere for elevene å relatere eksamensoppgaven til eksempler og oppgaver i læreboka.

4) *Språklige egenskaper*. En skriftlig beskrivelse av situasjonen i oppgaven inneholder ord og kan ha ulike språklige egenskaper som kan være viktig når elevene forsøker å relatere eksamensoppgaven til andre oppgaver og eksempler. Egenskapene kan være av semantisk eller syntaktisk karakter. Den semantiske karakteren (betydningen av ord og setninger) inneholder matematiske begreper, nøkkelord og -setninger som kan tipse elevene om en løsningsmetode. Et eksempel er den tidligere nevnte nøkkelordstrategien hvor ”mer” er knyttet til addisjon og ”mindre” til subtraksjon (Hegarty, et al., 1995). Den syntaktiske karakteren (setningslæren) kan gjøre det vanskelig for elevene å relatere eksamensoppgaven til andre oppgaver og eksempler, spesielt hvis oppgaveteksten er vanskeligere enn i læreboka eller lang med vanskelig grammatikk. Et eksempel er en lang oppgavetekst med spørsmålet midt i teksten.

5) *Eksplisitt formulerte hint*. Hint kan lede elevene mot en bestemt algoritme for å løse eksamensoppgaven. Et eksempel er ”Bruk innsettingsmetoden for å løse ligningssettet”.

6) *Responsformat*. Alle eksamensoppgaver krever en respons fra elevene, og oppgaven kan kreve et bestemt responsformat. Oppgaven kan direkte antyde formen på løsningen, og på den måten være en variabel som muligens kan påvirke elevens leting etter relasjoner med oppgaver i læreboka. Eksempler er å velge blant forhåndsbestemte svar, begrunne et svar og gi et kort svar.

4.2.2 Beskrivelser av de ulike klassifiseringene

Etter Palm m. fl. (2005), benytter jeg følgende klassifiseringer i analysen av eksamensoppgavene, i tillegg til en egen klassifisering (kjent formulerende resonnering):

Kjent algoritmisk resonnering (KAR): Eksamensoppgaven ligner på minst tre av oppgavene eller eksemplene fra lærebøkene med bakgrunn i oppgavevariablene. Som følge av det, er det antatt at elevene vil ha mulighet til å relatere eksamensoppgaven til oppgavene eller eksemplene i lærebøkene og benytte tilsvarende algoritme for å løse eksamensoppgaven. Eksamensoppgaven vil da bli klassifisert som løsbar med KAR

Guided algoritmisk resonnering (GAR): Eksamensoppgaven inneholder en tekst eller et formelark som elevene kan bruke for å kopiere en beskrevet prosedyre som vil løse oppgaven. Elevene er ikke nødt til å huske tilbake til oppgaver og eksempler fra lærebøkene, og derfor er en lignende oppgave i lærebøkene nok til å klassifisere en eksamensoppgave som løsbar ved GAR.

Minnebasert resonnering (MR): En eksamensoppgave kan bli klassifisert som løsbar ved MR dersom det finnes tre svar som kan løse eksamensoppgaven, enten i oppgaver, eksempler eller teoriteksten i lærebøkene.

Kjent formulerende resonnering (KFR): Jeg gjør oppmerksom på at følgende klassifisering er konstruert av meg, og ikke av Palm m. fl. (2005). Eksamen for grunnskolen i Norge inneholder oppgaver hvor elevene skal lage egne oppgaver, basert på informasjon oppgitt i oppgaven, tidligere eksamensoppgaver eller informasjonsheftet. Elevene har i løpet av ungdomsskolen laget mange egne oppgaver knyttet til forskjellige virkelige situasjoner, gjerne ved å hente informasjon fra en lengre tekst. De har også sett eksempler og løst oppgaver som omhandler virkelige situasjoner. Jeg mener at det er mulig, og sannsynlig, at elevene kan løse oppgaver som har i oppdrag å lage en egen oppgave med imiterende resonnering, så lenge situasjonen er kjent fra eksempler eller oppgaver i lærebøkene. Elevene kan da bruke eksempler og oppgaver de har sett i lærebøkene som modell for oppgaven de skal lage. Med modell mener jeg en situasjon og et oppdrag som elevene kan tilpasse informasjonen som gis i eksamensoppgaven. Oppgavene kan ikke klassifiseres som minnebasert eller algoritmisk resonnering, siden elevene ikke kan bruke et kjent svar eller en kjent algoritme. Derfor velger jeg å klassifisere slike oppgaver som løsbare med *kjent formulerende resonnering*, og omtaler de som oppgaver som krever imiterende resonnering.

Annen type imiterende resonnering (ATIR): Resonnering som det ikke er mulig å klassifisere som KAR, GAR eller MR, og som ikke tilfredsstiller kravene til kreativ resonnering.

Kreativ resonnering (KR): Dersom det ikke finnes svar eller algoritmer som kan løse eksamensoppgaven i lærebøkene, er det ikke mulig å løse oppgaven med overfladisk resonnering. Eksamensoppgaven blir klassifisert som løsbar ved KR hvis den kreative resonneringen som kan løse oppgaven blir vurdert til å være mulig for eleven å gjennomføre. At det er mulig for eleven å gjennomføre resonneringen betyr at teorien eleven trenger er inkludert i lærebøkene og at de kreative trinnene er av en type som i hvert fall noen elever klarer å gjøre.

4.2.3 Eksempler på klassifisering

For å illustrere hvordan eksamensoppgavene ble analysert og klassifisert, bruker jeg tre eksempler. Eksemplene er hentet fra eksamenssettene fra 2000, 2003 og 2005.

Oppgave 2D a) fra eksamen 2005: Skriv hva slags firkant dette er. (Kommentar: Elevene hadde konstruert firkanten de skulle navngi, et parallellogram.)

I analysen av oppgaven ble det antatt at eleven hadde konstruert firkanten korrekt. Oppgaven ble klassifisert til å kunne løses med minnebasert resonnement. Elevene har sett mange parallellogrammer i eksempler, oppgaver og teorien i lærebøkene.

Oppgave 1I fra eksamen 2000: Regn ut: 3a - (2b + a) - 4b.

Oppgaven ble klassifisert til å være mulig å løse med kjent algoritmisk resonnement. Det er mange lignende eksempler og oppgaver i lærebøkene, og regnereglene for algebra er også grundig presentert i teoriteksten.

Oppgave 19 b) fra eksamen 2003: Finn ut hvor mange kamper de har igjen. (Kommentar: Antall kamper vunnet og antall kamper spilt er oppgitt. De blir fortalt at dersom laget vinner resten av kampene som gjenstår, vil de ha vunnet 60 % av kampene sine den sesongen.)

Elevene har ikke sett en lignende oppgave før. De er nødt til å tenke nytt og bruke kunnskapene de har om brøk og prosent for å løse oppgaven. Oppgaven ble derfor klassifisert til å være løsbar med lokal kreativ resonnering. Årsaken til at jeg mener at elevene ikke trenger globalt kreativt resonnement er at elevene kun trenger å tenke nytt i forhold til hva som skjer med teller (antall kamper vunnet) og nevner (antall kamper spilt) når laget vinner flere kamper.

4.2.4 Gjennomføring

Eksamensoppgavene ble analysert enkeltvis i forhold til lærebøkene. Til hver oppgave ble det fylt ut et analyseskjema (se vedlegg 1). Analyseskjemaet er laget med utgangspunkt i det presenterte analyseverktøyet. Dersom eksamensoppgaven bestod av flere deloppgaver, ble hver deloppgave analysert for seg. Jeg forutsatte da at eleven hadde løst eventuelle deloppgaver tidligere i eksamensoppgaven. I de tilfellene hvor en deloppgave bestod av flere spørsmål ble hvert spørsmål analysert for seg. Et eksempel fra eksamenssettet fra 2005 er ”Konstruer firkant ABCD og skriv hva slags firkant dette er”. Årsaken til at jeg analyserte de to spørsmålene hver for seg er at de krever forskjellig type resonnering.

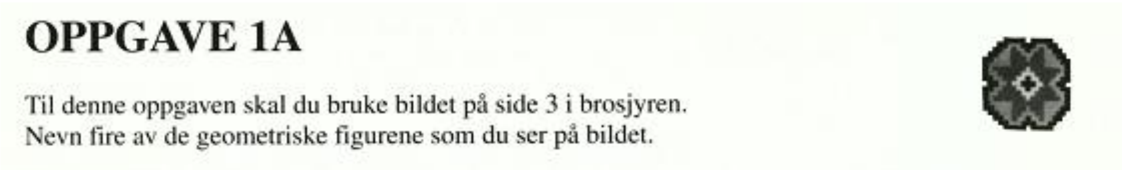
Kapittel 5 RESULTATER

I følgende kapittel presenterer jeg resultatene fra analysen av eksamensoppgaver fra 2000, 2003 og 2005. Først gir jeg noen eksempler på analyser av utvalgte oppgaver fra eksamenssettet. Eksemplene jeg har valgt ut fra eksamenssettene er oppgaver jeg syntes var enten lette eller vanskelige å analysere. Mitt overordnede mål er at eksemplene totalt sett skal illustrere de ulike klassifiseringer som ble gjort i analysene. Deretter skal jeg ta for meg det samlede eksamenssettet, med tanke på hvilken type resonnering elevene trenger for å løse eksamensoppgavene. Målet er at resultatene skal gi meg svar på om eksamen utfordrer elevene til kreativ resonnering (forskningsspørsmål 1). Jeg gjør oppmerksom på at resultatene av analysen av læreplanen i matematikk fra L97 og dens fokus på problemløsning (forskningsspørsmål 2) er plassert i delkapittel 3.4. Årsaken er at jeg mener plasseringen gir en bedre oppbygning av masteroppgaven.

5.1 EKSAMEN FRA 2000

Eksamenssettet fra 2000 inneholder 57 oppgaver[21], og alle er analysert. Eksemplene jeg velger å presentere er oppgave 1A og oppgave 3C.

5.1.1 Eksempel 1: Oppgave 1A


OPPGAVE 1A

Til denne oppgaven skal du bruke bildet på side 3 i brosjyren.
Nevn fire av de geometriske figurene som du ser på bildet.

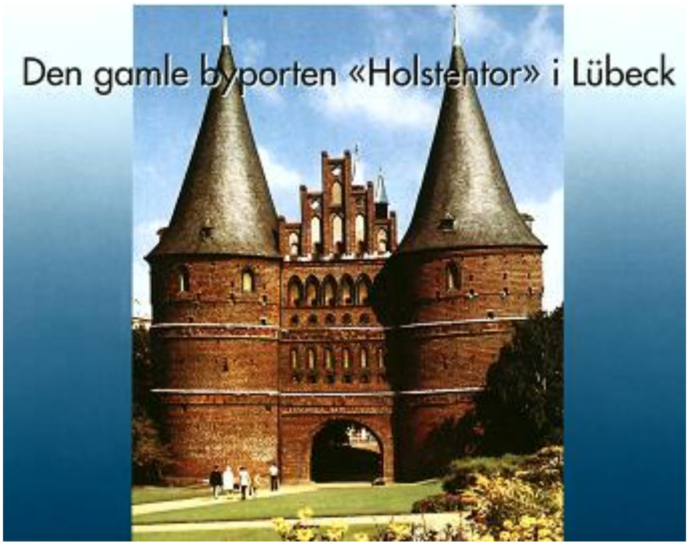
Figur 2: Oppgave 1A slik den ble presentert for eleven på eksamen fra 2000[22]

---

[21] Jeg minner om at antall oppgaver refererer til konkrete oppdrag, og ikke eksamensoppgaver med nummer foran.

[22] Symbolet på høyre side i oppgaven viser at elevene kan finne informasjonen de trenger i informasjonsheftet.

Oppgave 1A består av en henvisning til informasjonsheftet og et oppdrag (se figur 2). Figur 3 viser bildet som oppgaveteksten henviser til. Jeg syntes det var enkelt å analysere eksamensoppgaven fordi elevene blitt godt kjent med ulike geometriske figurer gjennom teori, eksempler og oppgaver i lærebøkene



Figur 3: Bildet på side 3 i informasjonsheftet til eksamen fra 2000

A. Eksamensoppgaven

A1: Elevene må kunne gjenkjenne og navngi ulike geometriske figurer.

A2: Oppdraget består i å navngi geometriske figurer som elevene ser på et bilde. Ingen eksplisitt informasjon er gitt i oppgaven. Bilde av byporten i Lübeck er den eneste representasjonen. Språket i eksamensoppgaven er enkelt og lett å forstå. Oppgaveteksten spør kun etter geometriske figurer, og gjør derfor ingen begrensninger til planet eller rommet. Det er ingen eksplisitt formulerte hint i oppgaven, og elevene skal svare kort med navnene på figurene.

B. Lærebøkene

B1: Det finnes en lignende oppgave i Mega og fem i Matematikk åtte-ni-ti. Begge lærebøkene inneholder teori om ulike geometriske figurer i planet og rommet.

B2: I oppgavene i lærebøkene er oppdraget å finne geometriske figurer i en tegning. Teorien bidrar til å gjøre begrepene kjent for elevene ved å presentere geometriske figurer og hva som kjennetegner de. Alle lærebøkene som ble analysert inneholder geometriske figurer. Ingen eksplisitt informasjon kan knyttes til eksamensoppgaven. Av representasjoner i oppgavene og teorien i lærebøkene finner jeg tegninger av geometriske figurer. Tegningene i lærebøkene er enkle, og jeg oppfatter det som vanskeligere for elevene å gjenkjenne geometriske figurer i bildet i eksamensoppgaven. I likhet med eksamensoppgaven er språket i oppgavene og teorien i lærebøkene enkelt å forstå. Jeg finner ingen eksplisitt formulerte hint verken i lærebøkene eller eksamensoppgaven. Responsformatet er et kort svar i eksamensoppgaven, og det samme gjelder for oppgavene i lærebøkene.

C. Konklusjon og argumentasjon

C: Min vurdering er at oppgaven kan løses med minnebasert resonnement. Elevene har sett en rekke geometriske figurer i teorien og oppgaver gjennom hele ungdomsskolen, og de har også noe erfaring med å lete etter geometriske figurer i tegninger. Bildet i eksamensoppgaven inneholder flere elementer enn tegningene som elevene er vant til fra lærebøkene, men de geometriske figurene kommer allikevel tydelig fram.

5.1.2 Eksempel 2: Oppgave 3C

I oppgave 3C skal elevene lage en tabell over prisindeksen på brevporto (se figur 4Figur 4). Elevene får oppgitt en tabell over prisindeksen på melk og oversikt over prisene for melk og brevporto i kroner (se figur 5 på side 65). Prisindeksen beskriver utviklingen i prisene for varer eller tjenester i forhold til et bestemt år (kalt basisåret), i eksamensoppgaven året 1950. Jeg syntes det var lett å klassifisere oppgaven som løsbar med kreativ resonnering (KR) fordi elevene ikke har noe kjennskap til prisindeks fra lærebøkene. Det var derimot verre å avgjøre om oppgaven krever lokal eller global KR.

OPPGAVE 3C

I denne oppgaven skal du bruke opplysningene på side 4 i brosjyren. Setter vi prisindeksen på melk i 1950 til 100, vil indeksen for de andre årene være slik tabellen viser.

Årstall	Melk	Brevporto
1900	24	
1950	100	100
1975	371	
1990	1693	
1999	2111	

Lag en tilsvarende oversikt over prisindeksene for innenriks brevporto.

Gi en vurdering av prisutviklingen fra 1900 til 1999 for melk og brevporto i forhold til hverandre.

Figur 4: Oppgave 3C slik den ble presentert for elevene på eksamen fra 2000

Norge i forrige århundre

Norge for 100 år siden

1 liter melk	10,8 øre
1 kg smør	1,77 kr
1 kg sukker	0,47 kr
1 kg oksekjøtt	0,69 kr
1 kg poteter	5,46 øre
Innenriks brevporto	10 øre
Daglønn vanlig arbeider	2,58 kr
Statens utgifter	76,9 mill kr

Stortinget vedtar å modernisere Kongsvinger festning (Foto: SCANPIX)

Norge for 50 år siden

1 liter melk	0,45 kr
1 kg smør	7,25 kr
1 kg sukker	0,62 kr
1 kg oksekjøtt	4,25 kr
1 kg poteter	0,34 kr
Innenriks brevporto	0,25 kr
Industritimelønn	3,02 kr
Statens utgifter	3042 mill kr

Sildefisket slår alle rekorder (Foto: SCANPIX)

Norge for 25 år siden

1 liter melk	1,67 kr
1 kg smør	12,50 kr
1 kg sukker	9,42 kr
1 kg oksekjøtt	20,03 kr
1 kg poteter	1,95 kr
Innenriks brevporto	1,25 kr
Industritimelønn	25,30 kr
Statens utgifter	51856 mill kr

Mer enn 100 norske skip ligger i opplag (Foto: SCANPIX)

Norge for 10 år siden

1 liter melk	7,62 kr
1 kg smør	32,78 kr
1 kg sukker	12,59 kr
1 kg oksekjøtt	109,82 kr
1 kg poteter	5,16 kr
Innenriks brevporto	3,20 kr
Industritimelønn	92,45 kr
Statens utgifter	295380 mill kr

159 mennesker omkommer under brann på passasjerferjen «Scandinavian Star» (Foto: SCANPIX)
Kilde: Norsk almanakk 2000 Almanakkforlaget

Kilde: Norsk almanakk 2000 Almanakkforlaget

Norge i 1999

1 liter melk	9,50 kr
1 kg smør	41,00 kr
1 kg sukker	13,50 kr
1 kg oksekjøtt	129,00 kr
1 kg poteter	9,30 kr
Innenriks brevporto	4,00 kr
Industritimelønn	135,00 kr
Statens utgifter	464 048 mill kr

Figur 5: Bildet på side 4 i informasjonsheftet til eksamen fra 2000

A. Eksamensoppgaven

A1: Prisindeksen for et bestemt år kan regnes ut ved å se på forholdet mellom prisen i det bestemte året og indeks og varepris i basisåret. Et eksempel for 1975 er: indeks 1975 = indeks 1950/pris 1950 *pris 1975.

A2: Oppdraget i oppgaven er å beregne prisindeksen for brevporto. Elevene skal også vurdere prisutviklingen for melk og brevporto i den undersøkte perioden. Prisindeksen for melk er gitt, i tillegg til prisene for melk og brevporto. Det er to representasjoner i oppgaven. Den ene er tabellen over prisindeksen for melk og brevporto. For brevporto er kun indeksen i 1950 fylt inn, resten skal eleven finne. Den andre er oversikten over et utvalg priser fra bestemte år. Språket er enkelt og forståelig, men elevene har ikke blitt kjent med betegnelsen prisindeks gjennom teori, eksempler eller oppgaver i lærebøkene. Eksamensoppgaven opplyser at dersom prisindeksen på melk i 1950 settes til 100, så blir indeksen for de andre årene slik tabellen viser. Jeg oppfatter opplysningen som et eksplisitt formulert hint fordi det gir elevene en pekepinn på hvordan de kan begynne med løsningen av oppgaven. Responsformatet er den ferdig utfylte tabellen og vurderingen av prisutviklingen fra 1900 til 1999.

B. Lærebøkene

B1: Ingen av lærebøkene inneholder lignende oppgaver og eksempler, men lærebøkene inneholder teori om proporsjonale størrelser.

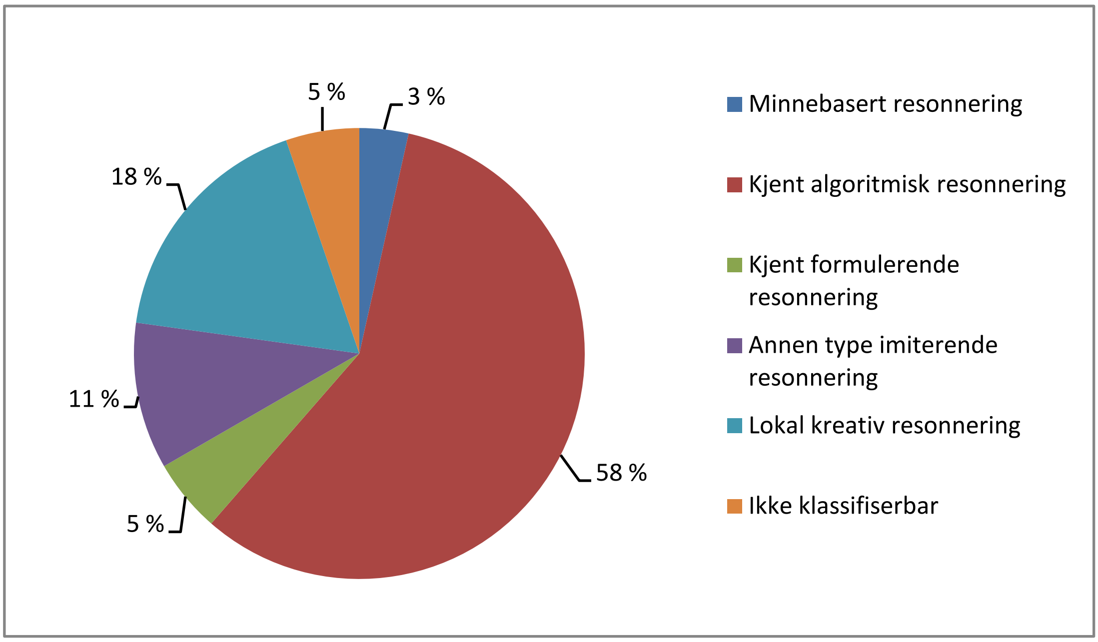
B2: Oppdraget i eksamensoppgaven er helt nytt for elevene. De har gjort oppgaver om proporsjoner i lærebøkene, men oppgavene handler om blanding av saft og fordeling av penger. I tillegg har de vurdert om størrelser er proporsjonale eller ikke, og teorien i lærebøkene tar for seg proporsjonale størrelser. Teorien, eksemplene og oppgavene i lærebøkene inneholder ingen eksplisitt informasjon som kan knyttes til oppgaven. Elevene er kjent med å slå opp i tabeller gjennom teori, oppgaver og eksempler, noe de må for å løse eksamensoppgaven. Språket i lærebøkene er enkelt og forståelig, akkurat som i eksamensoppgaven. Som nevnt, nevner ikke lærebøkene betegnelsen prisindeks, og jeg antar derfor at termen er ukjent for elevene. Lærebøkene inneholder ingen eksplisitte hint som ligner på hintet i eksamensoppgaven. Responsformatet i eksamensoppgaven er en utfylt tabell og en vurdering. Elevene har fylt ut tabeller i oppgaver om proporsjonale størrelser, men de har ikke vurdert prisutviklingen til varer basert på prisindeks tidligere.

C. Konklusjon og argumentasjon

C: Min konklusjon er at oppgaven er mulig å løse med lokal kreativ resonnering (LKR). Elevene har ikke gjort lignende oppgaver før, men de er godt kjent med teori om proporsjonale størrelser. Siden elevene ikke har kjennskap til betegnelsen prisindeks, må de selv finne sammenhengen mellom prisen og prisindeksen til melk for å finne prisindeksen for brevporto. Eksamensoppgaven gir elevene et hint ved å si klart og tydelig at de setter prisindeksen på melk i 1950 til 100. For å kunne vurdere prisutviklingen, må eleven forstå sammenhengen mellom prisen på varen og indeksverdien. Eksamensoppgaven krever kreativ resonnering fordi elevene må resonnere på en ny måte, bruke kunnskapene og erfaringene sine fleksibelt og basere resonneringen på matematikk. LKR løser eksamensoppgaven fordi elevene kun må bruke lokale elementer av kreativ resonnering når de skal finne sammenhengen mellom pris og prisindeks. Jeg vurderte om oppgaven krever global kreativ resonnering siden situasjonen er helt ny og elevene må oppdage sammenhenger selv. Men jeg kom fram til at LKR er nok, siden det eneste trinnet som krever kreativ resonnering er å finne sammenhengen mellom pris og prisindeks. I tillegg trenger elevene kun teori om proporsjonale størrelser.

5.1.3 Oppsummering av det samlede eksamenssettet

Eksamenssettet fra 2000 består av 57 oppgaver. Tre av oppgavene klarer jeg ikke å klassifisere på grunn av forskjeller i lærebøkene jeg analyserer (tilsvarer ca 5 % av alle oppgavene i eksamenssettet). Det totale antallet klassifiserte oppgaver blir dermed 54. Resultatet viser at elevene som har brukt Matematikk åtte-ni-ti eller Mega på ungdomstrinnet kan løse 77 % av oppgavene med imiterende resonnering (se figur 6). Andelen oppgaver som krever lokal kreativ resonnering er på 18 %. Ingen oppgaver ble klassifisert til å kreve global kreativ resonnering.



Figur 6: Klassifiseringer av oppgaver fra eksamen 2000

For å vise betydningen av å ha en stor andel eksamensoppgaver som elevene kan løse med imiterende resonnering, ønsker jeg å finne ut hvor mange poeng elever som kun benytter imiterende resonnering kan oppnå. Elevene kan maksimalt få 51 poeng på avgangseksamen. Oppgavene jeg ikke klarte å analysere er verdt 3 poeng, men kunne maksimalt gi elevene 2 poeng. Årsaken er at elevene måtte velge om de ville gjøre den ene (oppgave 8) A verdt 1 poeng) eller de to andre (oppgave 8) B a) og b) verdt totalt 2 poeng). Det betyr at oppgavene som ble klassifisert har en maksimal poenggrense på 49 poeng. En gjennomgang av de klassifiserte oppgavene viser at elever kan oppnå 40,5 poeng ved kun å benytte imiterende resonnering. Illustrasjonen forutsetter at elevene velger de eksamensoppgavene som gir flest poeng dersom vedkommende kan velge mellom flere oppgaver. Jeg mener at det er svært sannsynlig at poengsummen vil tilsvare vurderingen ”over middels kompetanse”, og karakteren 5. Påstanden baserer seg på resultatet fra forhåndssensuren til eksamen fra 2005, hvor den veiledende grensen for karakteren 5 var 41-51 poeng og for karakteren 6 var grensen 52-58 poeng (Utdanningsdirektoratet, 2005)[23].

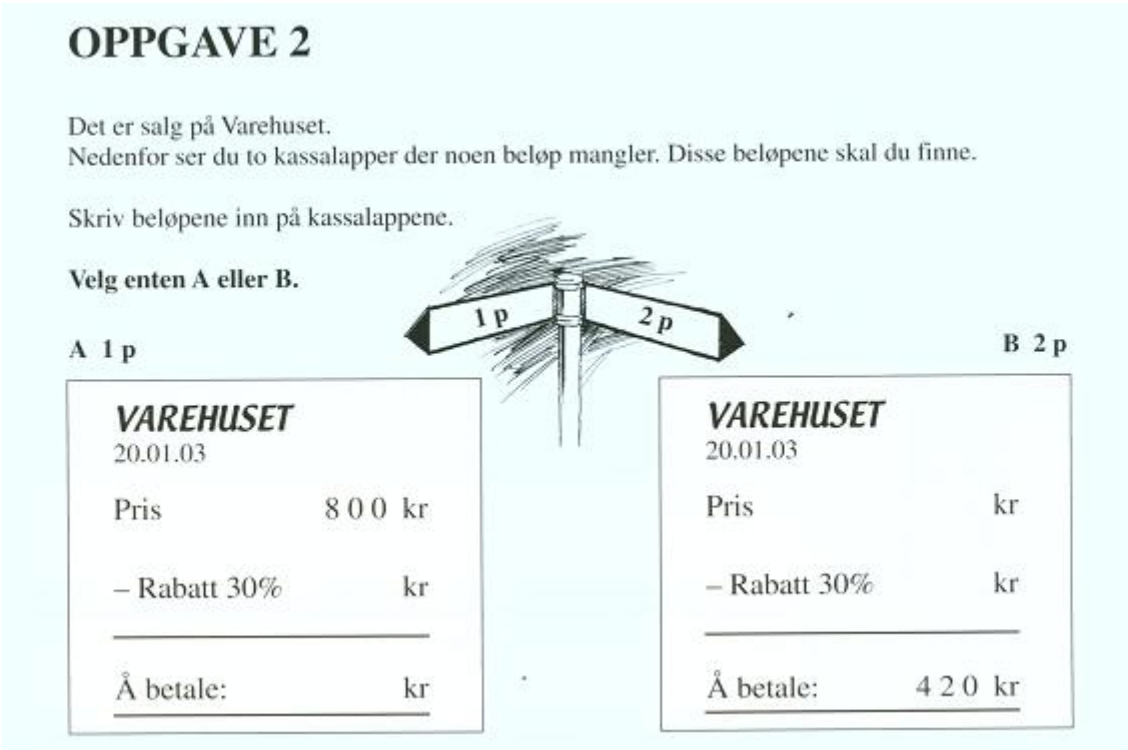
[23] Jeg har ikke klart å finne tilsvarende forhåndssensur fra 2000 (se vedlegg 2 for informasjon om søkeprosedyre).

5.2 EKSAMEN FRA 2003

Totalt inneholder eksamenssettet 64 oppgaver, og alle er analysert. Eksemplene jeg velger å presentere er oppgave 2) A, oppgave 1E og oppgave 3A.

5.2.1 Eksempel 1: Oppgave 2) A

Oppgave 2 består av en innledende tekst, og deretter skal elevene velge mellom deloppgave A og B. Her presenterer jeg analysen av deloppgave A (se figur 7). Jeg syntes det var enkelt å analysere eksamensoppgaven fordi lærebøkene inneholdt så mange eksempler og oppgaver som elevene kunne løse med samme algoritme, at konklusjonen ble helt klar.



Figur 7: Oppgave 2) A slik den ble presentert for elevene på eksamen fra 2003[24]

[24] Veiskiltet viser at elevene må velge en av oppgavene. 1 p og 2 p angir antall poeng hver av oppgavene maksimalt kan gi.

A. Eksamensoppgaven

A1: Elevene kan finne rabatten i kroner ved å multiplisere førpris med prosentfaktoren (0,30) eller ved å multiplisere førpris med brøken som 30 % står for (30/100). Når det er gjort finner elevene prisen som skal betales (nypris) ved å ta førpris minus rabatt i kroner, eventuelt ved å regne ut førpris-(førpris*0,30) eller førpris-(førpris*30/100).

A2: Oppdraget i eksamensoppgaven består i å fylle ut en kassalapp. For å gjøre det må elevene regne ut rabatt og nypris. Eksplisitt informasjon som blir gitt i oppgaven er førpris og rabatt i prosent (matematiske komponenter) og info om salg på Varehuset (en virkelig situasjon). Av representasjoner finner jeg kun kassalappen som elevene skal skrive svarene sine i. Ordene pris og rabatt nevnes i eksamensoppgaven, og jeg registrerer de som språklige egenskaper fordi ordene kan hjelpe elevene med å knytte eksamensoppgaven til eksempler og oppgaver i lærebøkene. Eksamensoppgaven inneholder ingen eksplisitt formulerte hint, og responsformatet er korte svar uten begrunnelser.

B. Lærebøkene

B1: Analysen av lærebøkene viser at Matematikk åtte-ni-ti inneholder et eksempel og åtte oppgaver som elevene kan løse med samme algoritme som eksamensoppgaven, mens Mega inneholder fem eksempler og hele 36 oppgaver. Det er ingen teori i lærebøkene som inneholder svar eller algoritmer, men enkel teori om prosent blir nevnt i begge lærebøkene.

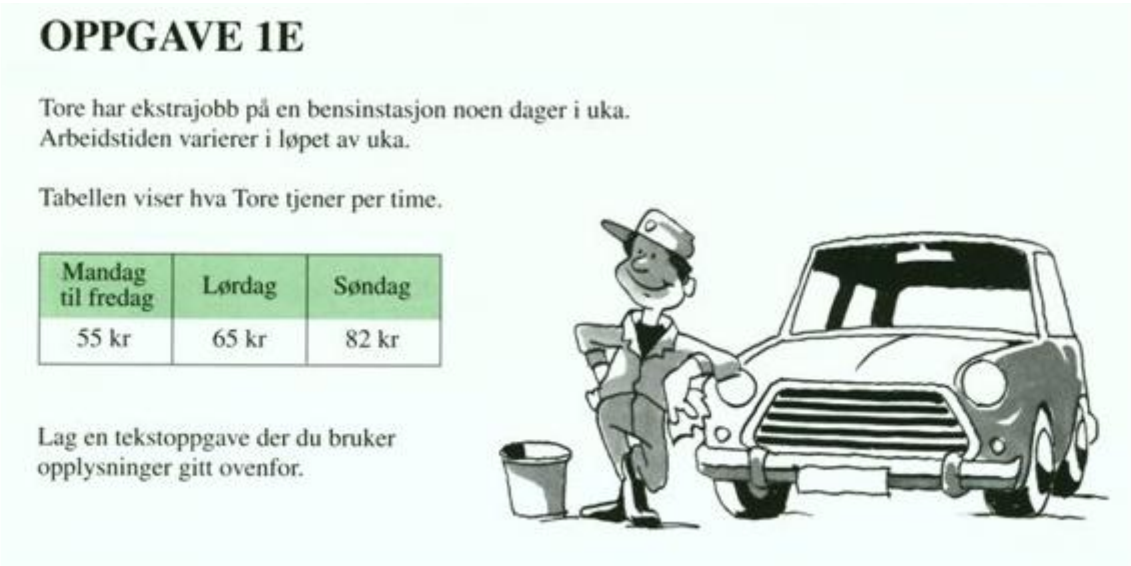
B2: Elevene har fått samme oppdrag som eksamensoppgaven i eksempler og oppgaver i lærebøkene, men teorien i lærebøkene inneholder ingen informasjon som kan hjelpe dem. Eksplisitt informasjon i oppgavene i lærebøkene er førpris og rabatt i prosent (matematiske komponenter), og oppgavene handler om mennesker som skal kjøpe en gjenstand som de får en viss prosent rabatt på (en virkelig situasjon), akkurat slik som eksamensoppgaven. Ingen av eksemplene eller oppgavene i Matematikk åtte-ni-ti oppgir kassalappen slik som eksamensoppgaven gjør. Ti av oppgavene i Mega oppgir et regnestykke som ligner på kassalappen i eksamensoppgaven, men ingen av eksemplene i Mega gjør det samme. Eksemplene og oppgavene i lærebøkene nevner ordet rabatt eller avslag. Eksamensoppgaven bruker ordet rabatt. Teorien inneholder presentasjon av begrepet prosent og prosenttegnet, derfor antar jeg at elevene kjenner til begge. Responsformatet på eksemplene og oppgavene i lærebøkene er kort svar uten begrunnelse, på samme måte som eksamensoppgaven.

C. Konklusjon og argumentasjon

C: Min vurdering er at oppgaven er mulig å løse med kjent algoritmisk resonnement. Elevene har sett flere eksempler og regnet mange lignende oppgaver før. Teorien gir ingen regler eller teoremer som kan hjelpe elevene med å løse oppgaven, men kunnskap om hva prosent er, er viktig for å kunne løse oppgaven. Metoden for å løse oppgaven gis i eksempler i lærebøkene. Ordet rabatt kan hjelpe elevene med å relatere eksamensoppgaven til oppgavene i lærebøkene. De fleste oppgavene i lærebøkene er gitt som tekst, og ikke som en kassalapp. Jeg mener imidlertid at kassalappen gjør eksamensoppgaven enklere for elevene å løse fordi forholdet mellom førpris, rabatt og nypris er gitt.

5.2.2 Eksempel 2: Oppgave 1E

Oppgave 1E består av en tekst og en tabell (se figur 8) Elevene skal lage en egen oppgave basert på informasjonen som ble gitt i eksamensoppgaven.



OPPGAVE 1E

Tore har ekstrajobb på en bensinstasjon noen dager i uka.
Arbeidstiden varierer i løpet av uka.

Tabellen viser hva Tore tjener per time.

Mandag til fredag	Lørdag	Søndag
55 kr	65 kr	82 kr

Lag en tekstoppgave der du bruker opplysninger gitt ovenfor.

Figur 8: Oppgave 1E slik den ble presentert for elevene på eksamen fra 2003

Jeg syntes det var lett å klassifisere oppgaven fordi elevene har laget mange egne oppgaver før, og jeg mener at situasjonen i eksamensoppgaven er kjent.

A. Eksamensoppgaven

A1: Ingen svar eller algoritmer tilgjengelig.

A2: Elevene skal lage en tekstoppgave basert på informasjon som er gitt i eksamensoppgaven. Eksplisitt informasjon om timelønnen til en person på ulike dager i uka er gitt (matematiske komponenter) og personen jobber på en bensinstasjon (en virkelig situasjon). Oppgave inneholder en tabell med timelønnen for tre perioder, mandag-fredag, lørdag og søndag. Språket er forståelig, og oppgaven inneholder ingen ukjente ord. Jeg finner ingen eksplisitte hint, og responsformatet er en tekstoppgave.

B. Lærebøkene

B1: Jeg finner ingen lignende eksempler i de to lærebøkene. Elevene som har brukt Matematikk åtte-ni-ti har laget minst[25] 73 egne oppgaver. Tilsvarende tall for Mega er 204. Ingen av oppgavene elevene skulle lage har lønn som tema. Totalt finner jeg 18 oppgaver om lønn i Matematikk åtte-ni-ti og 20 i Mega. Jeg finner teori om lønn i både Matematikk åtte-ni-ti og Mega.

B2: Ingen av oppgavene i lærebøkene har samme oppdrag som eksamensoppgaven. Elevene har regnet oppgaver basert på lignende informasjon, men da har oppgaven vært ferdig formulert. Lærebøkene inneholder teori om timelønn. De fleste oppgavene handler om mennesker som arbeider på en fabrikk eller i en butikk. Ingen av oppgavene i lærebøkene handler om en person som arbeider på en bensinstasjon. I de fleste oppgavene er eksplisitt informasjon om matematiske komponenter timelønn, slik som eksamensoppgaven, og antall timer personen jobber. Noen oppgaver oppgir ulik timelønn for uke og helg, enten i kroner eller i prosent. Ingen av oppgavene i lærebøkene oppgir timelønnen i tabell slik eksamensoppgaven gjør. Det kan være en

[25] Jeg skriver minst fordi flere av oppgavene i lærebøkene ber elevene lage et bestemt antall oppgaver eller flere. Et eksempel er "Lag minst to oppgaver". Jeg har da registrert to oppgaver, men det er mulig at elevene har laget flere.

faktor som gjør det vanskeligere for elevene å knytte eksamensoppgaven til oppgavene i lærebøkene, men min vurdering er at det vil ha en minimal effekt siden tabellen er så oversiktlig og enkel å forstå. Språket og presentasjonen i eksamensoppgaven ligner på oppgavene i lærebøkene, og alle ordene som brukes er kjente fra lærebøkene. Ordet timelønn brukes i eksamensoppgaven og i lærebøkene. Presentasjonen av eksamensoppgaven ligner på oppgavene i lærebøkene med informasjonen elevene trenger for å løse oppgaven først og oppdraget til slutt. På samme måte som eksamensoppgaven, inneholder ingen av oppgavene i lærebøkene eksplisitte hint. Responsformatet er et kort svar eller et diagram i oppgavene i lærebøkene, mens i eksamensoppgaven er responsformatet en oppgavetekst.

C. Konklusjon og argumentasjon

C: Slik jeg vurderer det, er oppgaven løsbar med kjent formulerende resonnement. Elevene har ikke laget egne oppgaver som omhandler lønn før, men de har gjort mange slike oppgaver. Jeg mener oppgavene elevene har løst i lærebøkene kan fungere som modeller når eleven skal lage oppgaver selv. Teorien inneholder ingen informasjon som elevene direkte kan bruke for å løse oppgave, men den gjør at begrepene som benyttes i eksamensoppgaven er kjente. Ordet timelønn kan hjelpe elevene å relatere eksamensoppgaven med oppgavene i lærebøkene siden alle oppgavene i lærebøkene bruker ordet.

5.2.3 Eksempel 3: Oppgave 3A

I oppgave 3A skal elevene konstruere en femkant og forklare hvordan de gjorde konstruksjonen (se figur 9). Jeg syntes det var enkelt å komme frem til at eksamensoppgaven krever kreativ resonnering (KR), men vanskelig å avgjøre om den krever lokal eller global KR.

OPPGAVE 3A

I en femkant ABCDE er:

- AB = 9,0 cm
- $\angle A = 105^\circ$
- $\angle ABE = 30^\circ$
- Avstanden fra D til BE er 4,0 cm
- $\angle BED = 60^\circ$
- BC = CD
- Linja BD halverer $\angle B$

Tegn en hjelpefigur og konstruer femkanten. (Du skal føre inn hjelpefiguren.)
Skriv en kort forklaring til konstruksjonen, gjerne punktvis.

Figur 9: Oppgave 3A slik den ble presentert for elevene i eksamen fra 2003

A. Eksamensoppgaven

A1: Konstruksjon av ulike vinkler og linjestykker løser oppgaven.

A2: Eksamensoppgaven gir elevene et oppdrag om å lage en hjelpefigur og konstruere en femkant basert på en tekst. I tillegg skal de forklare konstruksjonen. Eksplisitt informasjon om hvordan femkanten skal konstrueres er gitt. Av representasjoner finner jeg kun oppgaveteksten som er delvis punktvis. Punktene er plassert i samme rekkefølge som elevene behøver dem. Oppgaveteksten er enkel og lett å forstå. Jeg finner ingen eksplisitte hint i eksamensoppgaven, og responsformatet er hjelpefigur, konstruert figur og forklaring.

B. Lærebøkene

B1: Det finnes ingen lignende eksempler eller oppgaver i lærebøkene. Elevene har konstruert mange trekanter og firkanter før, men ingen femkanter. Ingen av eksemplene eller oppgavene omhandler dobling av vinkler, kun halvering. Lærebøkene inneholder en grundig presentasjon av konstruksjon av vinkler og paralleller, men ingen teori om dobling av vinkler.

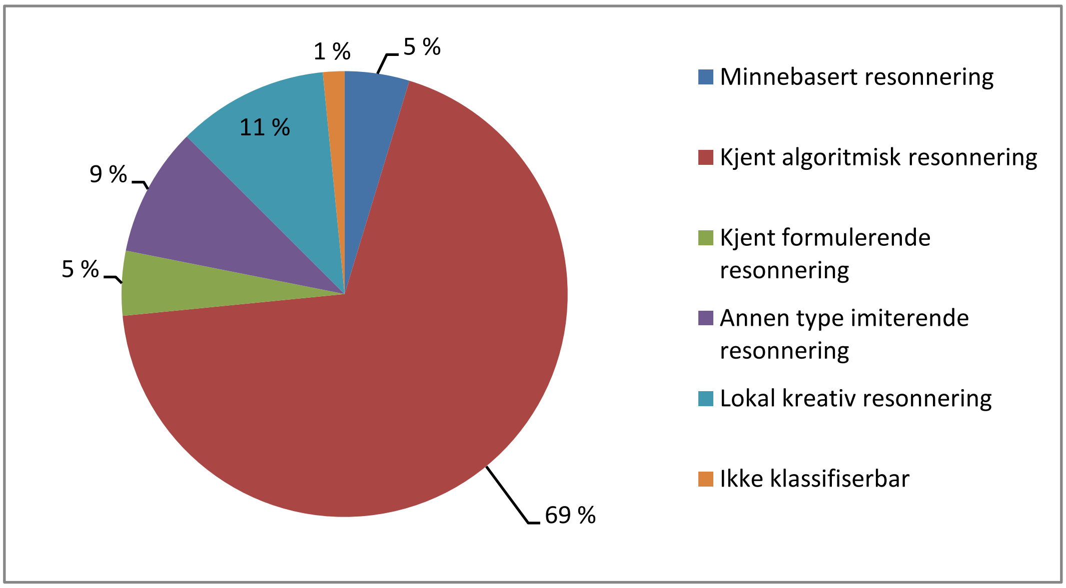
B2: Elevene er kjent med å få oppdrag på tilsvarende måte. Oppdraget er noe større enn hva som er vanlig i eksempler og oppgaver i lærebøkene fordi elevene skal konstruere en femkant, og ikke en trekant eller firkant. Elevene har utført alle konstruksjonene som trengs for å løse eksamensoppgaven, med unntak av dobling av vinkel. Informasjonen de trenger er gitt som en punktvis tekst i eksamensoppgaven. Mange av konstruksjonsoppgavene i lærebøkene inneholder hjelpefigur, men jeg finner også flere oppgaver hvor elevene skal lage egen hjelpefigur. I lærebøkene består oppgavene hvor elevene skal konstruere trekanter og firkanter av vanlig eller punktvis tekst. Symbolene og bokstavene i eksamensoppgaven er vanlig å bruke i konstruksjonsoppgaver i lærebøkene, og elevene bør være kjent med dem. Responsformatet i eksamensoppgaven er hjelpefigur, konstruert figur og forklaring. Elevene har laget hjelpefigur og konstruert figurer i oppgavene i lærebøkene. De har ikke skrevet forklaring til konstruksjonen før.

C. Konklusjon og argumentasjon

C: Eksamensoppgaven krever lokal kreativ resonnering (LKR). Elevene har ikke laget femkanter før. De kjenner imidlertid godt til konstruksjon av vinkler og paralleller, noe som trengs for å løse oppgaven. For å løse eksamensoppgaven må elevene doble en vinkel. Lærebøkene tar kun for seg halvering av vinkler. Teorien i lærebøkene inneholder imidlertid det elevene trenger. De kan for eksempel rotere vinkelen om toppunktet eller gjøre motsatt av metoden for halvering av vinkler. Dobling av en vinkel krever kreativ resonnering siden elevene ikke har en metode for å gjøre det. De må bruke kunnskap og erfaringer fleksibelt og på en ny måte. Siden det kun er doblingen av en vinkel som krever at elevene må resonnere kreativt, mener jeg at oppgaven kun trenger LKR.

5.2.4 Oppsummering av det samlede eksamenssettet

Eksamenssettet fra 2003 består av 64 oppgaver. En av oppgavene klarer jeg ikke å klassifisere på grunn av forskjeller i lærebøkene som blir brukt i analysen (tilsvarer ca 1 % av alle oppgavene i eksamenssettet). Antall klassifiserte oppgaver blir derfor 63. Klassifiseringen viser at elevene som har brukt Matematikk åtte-ni-ti eller Mega kan løse 88 % av oppgavene med imiterende resonnering (se figur 10). Hele 69 % av oppgavene er løsbare med algoritmer elevene kjenner fra lærebøkene gjennom eksempler og oppgaver. Kun 11 % av oppgavene krever at elevene må beherske kreativ resonnering.



Figur 10: Klassifisering av oppgaver fra eksamen 2003

På samme måte som i presentasjonen av resultatet fra eksamen fra 2000, ønsker jeg å illustrere hvor mange poeng elever som kun behersker imiterende resonnering kan oppnå på eksamen. Elevene kan maksimalt få 55 poeng på avgangseksamen. Oppgaven jeg ikke klarte å analysere kunne gi 2 poeng, og siden elevene ikke kunne velge den bort, betyr det at oppgavene som ble klassifisert har en maksimal poenggrense på 53 poeng. En gjennomgang av de klassifiserte oppgavene viser at elever kan oppnå 50 poeng ved kun å benytte imiterende resonnering. Illustrasjonen forutsetter at elevene velger de eksamensoppgavene som gir flest poeng dersom vedkommende kan velge mellom flere oppgaver. Jeg mener at det er svært sannsynlig at poengsummen vil tilsvare vurderingen ”over middels kompetanse”, og karakteren 5 eller 6. Påstanden baserer seg på resultatet fra forhåndssensuren til eksamen fra 2005, hvor den veiledende grensen for karakteren 5 var 41-51 poeng og for karakteren 6 var grensen 52-58 poeng (Utdanningsdirektoratet, 2005)[26].

5.3 EKSAMEN FRA 2005

Totalt er alle 69 oppgavene fra eksamenssettet analysert. Eksemplene jeg velger å presentere er oppgave 1, oppgave 3B og oppgave 3D.

5.3.1 Eksempel 1: Oppgave 1

Oppgave 1 består av tekst og en tabell som elevene skal fylle resultatene fra arbeidet inn i (se figur 11). Jeg syntes det var vanskelig å analysere eksamensoppgaven fordi elevene ikke kjenner en konkret algoritme for å løse den fra lærebøkene, men samtidig er oppgaven utformet på en slik måte at oppgaveteksten fungerer som en guide.

OPPGAVE 1

2 p

Seks personer kastet piler mot en blink.
Du får vite at
- hver av de seks kastet to piler.
- Åse fikk 7 poeng (innsatt i tabellen).
- Markus fikk totalt 1 poeng.
- Shahida fikk totalt 3 poeng, men ingen av pilene gav 0 poeng.
- begge pilene til Kamil gav samme poengverdi.
- Mathilde fikk totalt 6 poeng.

Nederst i tabellen står det hvilken poengverdi de tolv pilene fikk.
Fyll ut tabellen.

Poeng per kast:	0 poeng	1 poeng	2 poeng	3 poeng	4 poeng
Åse				1	1
Shahida					
Mathilde					
Markus					
Kamil					
Ivar					
Piler i alt:	2	2	2	4	2

Figur 11: Oppgave 1 slik den ble presentert for elevene på eksamen fra 2005[27]

[26] Jeg har ikke klart å finne tilsvarende forhåndssensur fra 2003 (se vedlegg 2 for informasjon om søkeprosedyre).

[27] 2 p angir hvor mange poeng elevene maksimalt kan få på oppgaven.

A. Eksamensoppgaven

A1: Det finnes ingen algoritmer eller svar som kan løse eksamensoppgaven.

A2: Oppdraget i eksamensoppgaven består i å fylle ut en tabell med utgangspunkt i informasjonen oppgaven gir. Eksplisitt informasjon om poengene de ulike deltakerne får i pilkast blir gitt. Informasjonen elevene trenger for å løse oppgaven blir gitt punktvis som tekst, og resultatene skal elevene fylle inn i en tabell. Oppgaven inneholder også en tegning av seks personer som kaster på blink, men tegningen er misvisende. På blinken har tre av pilene truffet området med 0 poeng, mens i oppgaven gir kun to av pilene 0 poeng. Teksten har et enkelt og forståelig språk. Eksamensoppgaven inneholder ingen eksplisitte hint, og responsformatet er korte svar i tabell.

B. Lærebøkene

B1: Analysen av lærebøkene viser at både Matematikk åtte-ni-ti og Mega inneholder tre lignende oppgaver. Ingen av lærebøkene inneholder teori jeg kan knytte til eksamensoppgaven.

B2: Jeg finner tre oppgaver med lignende oppdrag, både i Matematikk åtte-ni-ti og Mega, men ingen ber om at elevene skal fylle ut en tabell. Oppgavene i Mega stiller konkrete spørsmål, for eksempel ”Kven køyrde Volkswagen?” (Gulbrandsen & Melhus, 1999c, s. 144). Ingen oppgaver eller eksempler i lærebøkene kan knyttes til eksamensoppgaven med hensyn på eksplisitt informasjon om situasjonen eller representasjoner. Oppgaveteksten i Mega er presentert på samme måte som eksamensoppgaven, altså tekst i punkter, men punktene er ikke plassert i samme rekkefølge som elevene trenger dem. I Matematikk åtte-ni-ti er informasjonen gitt som en relativt lang tekst (12-17 linjer), og elevene må selv trekke ut relevant informasjon. Min mening er at det vil være vanskeligere for elevene å trekke ut informasjonen de trenger fra oppgavene i Matematikk åtte-ni-ti, enn fra eksamensoppgaven og Mega. Eksamensoppgaven inneholder ingen eksplisitte hint, og jeg finner ingen oppgaver eller eksempler som lignet på eksamensoppgaven med tanke på responsformat.

C. Konklusjon og argumentasjon

C: Min vurdering er at elevene kan løse oppgaven med annen type algoritmisk resonnement. Eksamensoppgaven fremstår som enkel og lett å forstå. Den punktvise teksten med informasjonen elevene trenger for å løse oppgaven er oppgitt i samme rekkefølge som elevene har behov for dem, og ved å følge punktene kronologisk kan elevene løse oppgaven. Elevene trenger ikke å tenke nytt. Jeg tolker det slik at tabellen gjør det enklere for elevene å løse oppgaven fordi oppgaven blir redusert til innfylling av informasjonen elevene får i tekstpunktene. Det faktum at tegningen er misvisende kan imidlertid forvirre noen elever. Jeg fant tre lignende oppgaver, både i Matematikk åtte-ni-ti og Mega, men ingen av dem har samme oppdrag, eksplisitt informasjon eller responsformat som eksamensoppgaven. Slik jeg vurderer det, er det derfor ikke mulig å klassifisere oppgaven som mulig å løse med kjent algoritmisk resonnement. Jeg vurderte om jeg kunne klassifisere oppgaven som løsbar med guided algoritmisk resonnement (GAR), siden tekstpunktene var plassert kronologisk, og dermed kunne fungere som en prosedyre som elevene kunne bruke. Konklusjonen min ble imidlertid at eksamensoppgaven ikke kunne klassifiseres som GAR fordi tekstpunktene ikke fremstår som en klar prosedyre, og elevene har heller ikke sett lignende oppgaver eller eksempler fra lærebøkene. I de seks nevnte oppgavene fra lærebøkene er informasjonen plassert helt vilkårlig, ikke kronologisk som i eksamensoppgaven.

5.3.2 Eksempel 2: Oppgave 3B

OPPGAVE 3 B

Familiene Khan og Johnsen skal legge ny parkett i stuene sine.

Khan har en stue på a m^2 der prisen på parkett er b kr per m^2.

Arealet av Johnsens stue er $\frac{3}{4}$ av stuen til Khan.

Johnsen betalte totalt 12,5 % mer enn Khan.

Hvor mange prosent dyrere per m^2 er parketten til Johnsen enn parketten til Khan?

Figur 12: Oppgave 3B slik den ble presentert for elevene på eksamen fra 2005

I oppgave 3B skal elevene finne den prosentvise prisforskjellen på to typer parkett (se figur 12). Analysen av eksamensoppgaven viste raskt at oppgaven krever kreativ resonnering. Det var imidlertid vanskeligere å komme fram til om den trenger lokal eller global kreativ resonnering.

A. Eksamensoppgaven

A1: Det finnes ingen svar eller algoritmer som kan løse oppgaven.

A2: Oppdraget er å finne ut hvor mye dyrere per m^2 en type parkett er i forhold til en annen. Elevene får oppgitt at Khans stue er a m^2, og parketten hans koster b kr per m^2. Arealet til Johnsens stue er ¾ av arealet til Khans stue, og Johnsen betalte totalt 12,5 % mer enn Khan for sin parkett. Oppgaven består kun av tekst. Språket er enkelt og forståelig, men teksten inneholder mye informasjon. Et konkret areal og en bestemt pris er ikke oppgitt, kun variablene a og b. Eksamensoppgaven inneholder ingen eksplisitte hint, og responsformatet er et kort svar.

B. Lærebøkene

B1: Lærebøkene inneholder ingen lignende oppgaver eller eksempler. Jeg finner heller ikke svar eller algoritmer for å løse oppgaven i teorien.

B2: Det finnes ingen eksempler, oppgaver eller teori som er nært knyttet til eksamensoppgaven med hensyn på oppgavevariablene. Bruk av variablene a og b i oppgaveteksten kan gi elevene hint om at de må bruke algebra. Ellers finner jeg ingen informasjon som jeg kan knytte til teori, eksempler eller oppgaver i lærebøkene.

C. Konklusjon og argumentasjon

C: Oppgaven krever at elevene behersker global kreativ resonnering (GKR). Det finnes ingen oppgaver, eksempler eller teori som direkte kan løse denne oppgaven, Elevene må bruke det de kan om algebra, ligninger og prosent. Elevene må finne sammenhengen mellom areal, pris per m^2 og total pris, og deretter finne relasjonen mellom de tre faktorene og de to stuene. Eksamensoppgaven gir ingen hint til elevene. Bruk av abstrakte verdier som a og b, vurderer jeg til å gjøre løsningen av oppgaven vanskeligere for eleven. Med bakgrunn i den gitte analysen av oppgaven, mener jeg at oppgaven krever kreativ resonnering i mer enn lokale elementer, og jeg klassifiserer den som mulig å løse med GKR.

5.3.3 Eksempel 3: Oppgave 3D

I oppgave 3D skal elevene designe sine egne øredobber. Eksamensoppgaven består av en tekst som inneholder kravene til øredobbene (se figur 13). Jeg syntes det var enkelt å komme fram til at eksamensoppgaven krever kreativt resonnement fordi det ikke finnes noen lignende oppgaver eller eksempler i lærebøkene.

OPPGAVE 3 D

En gullsmed har dette tilbudet:
Design dine egne øredobber i sølv.

Formen skal være en kjent romfigur, for eksempel
- kule
- kjegle
- pyramide
- sylinder
- prisme

eller en kombinasjon av disse.
Vekten per øredobb må ikke være mer enn 3,0 g.
Tettheten til sølvlegeringen er 10,0 g/cm^3.

Lag en tegning av øredobben, og sett mål på tegningen.

Vis ved regning at forutsetningene er oppfylt.

Figur 13: Oppgave 3D slik den ble presentert for elevene på eksamen fra 2005

A. Eksamensoppgaven

A1: Det finnes ingen svar eller algoritmer som kan løse oppgaven. Elevene må imidlertid kunne regne ut volum og masse til en romfigur for å kunne løse oppgaven.

A2: Oppdraget består i å designe et par sølvøredobber basert på kjente romfigurer. Hver øredobb kan ikke veie mer enn 3 gram. Elevene skal lage en tegning av øredobben, sette på mål og vise at kravene var oppfylt (romfigur(er) med totalvekt under 3 gram). Eksplisitt informasjon om massetettheten for sølvlegering blir gitt (matematiske komponenter), og eksamensoppgaven er knyttet til en situasjon som kunne vært virkelig. Oppgaven angir ikke om romfigurene er støpte eller om de kan være hule inni. Den sier heller ikke noe om hvordan øredobben skal festes til øret, og om eventuell vekt av festeanretningen kommer i tillegg. Av representasjoner finner jeg kun oppgaveteksten, som for øvrig er enkel og lett å forstå. Eksamensoppgaven gir eksempler på navn på ulike romfigurer, men ingen formler eller tegninger. Jeg finner ingen eksplisitte hint i oppgaven. Responsformatet består av tegning med mål og beregning av vekt.

B. Lærebøkene

B1: Ingen av lærebøkene inneholder lignende oppgaver eller eksempler. Jeg finner imidlertid sju eksempler og 144 oppgaver som omhandler utregning av volum av ulike romfigurer i Matematikk åtte-ni-ti, og to eksempler og 99 oppgaver i Mega. I Matematikk åtte-ni-ti finner jeg et eksempel og tolv oppgaver som går ut på å regne ut massen til romfigurer, og i Mega finner jeg et eksempel og 43 oppgaver. Teorien i begge lærebøkene inneholder formel for utregning av volumet til prisme, sylinder, pyramide, kjegle og kule, i tillegg til formel for massen til en romfigur når volum og massetetthet er kjent.

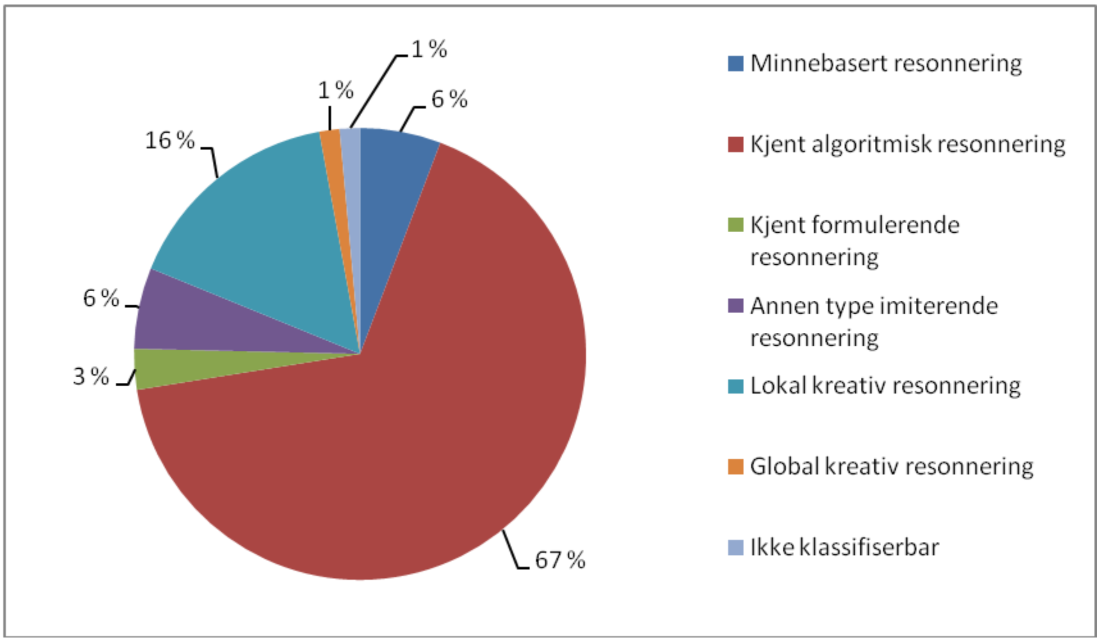
B2: Ingen av eksemplene eller oppgavene i lærebøkene ligner på eksamensoppgaven. Elevene har imidlertid sett flere eksempler og gjort flere oppgaver som tar for seg beregning av volumet og massen til romfigurer. Teorien inneholder formler for volumet til alle romfigurene eksamensoppgaven nevner som eksempler, og formelen for massen når volum og massetetthet er kjent. Ingen av oppgavene i lærebøkene ber elevene om å lage seg en egen romfigur, men i stedet er målene eller volumet til romfiguren gitt. Figurene i lærebøkene består av en eller flere kjente romfigurer. Eksemplene og oppgavene i lærebøkene som handler om massetetthet inneholder to av de tre størrelsene, volum, masse og massetetthet. Eksamensoppgaven skiller seg ut fra oppgavene i lærebøkene ved at elevene kun får oppgitt massetettheten. Volumet må elevene finne selv. Ingen av eksemplene eller oppgavene i lærebøkene setter en øvre grense for vekt, slik som eksamensoppgaven gjør. Eksamensoppgaven inneholder ingen tegninger av romfigurene, mens mange av oppgavene i lærebøkene gjør det. Språket i eksamensoppgaven, lærebokteorien, -eksemplene og -oppgavene vurderer jeg som like enkelt og forståelig. Elevene har kjennskap til begrepene i eksamensoppgaven, for eksempel romfigur og tetthet, fra teori, eksempler og oppgaver i lærebøkene. Jeg finner ingen eksplisitte hint, verken i eksamensoppgaven eller oppgavene i lærebøkene. Responsformatet i oppgavene og eksemplene i lærebøkene er stort sett et kort svar. I eksamensoppgaven skal elevene levere en tegning med mål og utregninger.

C. Konklusjon og argumentasjon

C: Eksamensoppgaven krever at elevene behersker lokal kreativ resonnering. Elevene har ikke sett lignende oppgaver eller eksempler tidligere, og de har ingen kjente svar eller algoritmer som kan løse oppgaven. Formel for volumet til en rekke romfigurer er kjent for elevene gjennom teori, eksempler og oppgaver i lærebøkene. I tillegg har de regnet flere oppgaver som går ut på å finne massen til en romfigur, basert på volum og massetetthet. Elevene må ta en rekke valg som de ikke kan imitere fra teori, eksempler og oppgaver i lærebøkene, for eksempel velge hvilke(n) romfigur(er) de vil benytte. De er heller ikke kjent med øvre grense for vekt per øredobb, eller hvordan de kan justere målene på romfiguren(e) de har valgt å bruke dersom øredobben blir for tung. En mulig strategi for å løse eksamensoppgaven er å gjette bestemte mål på en romfigur, og deretter regne ut massen for å se om den ble under 3 gram. Hvis elevene er heldige på første forsøk, vil en slik strategi løse oppgaven. Min vurdering er at det er lite sannsynlig at elevene vil klare å komme fram til en romfigur som tilfredsstiller kravene ved ren gjetning. De har ikke nok erfaring fra oppgavene til å kunne gjette strategisk på passende mål for å oppnå en gitt masse. Dersom de gjetter feil første gangen, kreves det kreativ resonnering for å justere målene på romfiguren slik at den blir lettere. En alternativ løsning er først å beregne hvor stort volum hver øredobb maksimalt kan ha (maksimalt volum = maksimal masse/tetthet), og deretter designe øredobbene så de får et mindre volum enn det maksimale. En slik fremgangsmåte vil også kreve kreativ resonnering fordi elevene har ingen teori, eksempler eller oppgaver han kan imitere.

5.3.4 Oppsummering av det samlede eksamenssettet

Eksamenssettet fra 2005 består av 69 oppgaver. Akkurat slik som i eksamenssettet fra 2003, er det en av oppgavene jeg ikke klarer å klassifisere på grunn av forskjeller i lærebøkene jeg analyserer (tilsvarer ca 1 % av alle oppgavene i eksamenssettet). Antall klassifiserte oppgaver blir dermed 68. Resultatet viser at elevene som har brukt Matematikk åtte-ni-ti eller Mega på ungdomstrinnet kan løse 82 % av oppgavene med imiterende resonnering (se figur 14). Andelen oppgaver som krever kreativ resonnering er på 17 %, hvorav 16 % krever lokal og 1 % krever global kreativ resonnering.



Figur 14: Klassifiseringer av oppgaver fra eksamen 2005

På samme måte som i presentasjonen av resultatet fra de to andre eksamenssettene, ønsker jeg å illustrere hvor mange poeng elever som kun behersker imiterende resonnering kan oppnå på eksamen. Elevene kan maksimalt få 58 poeng på eksamen. Oppgaven jeg ikke klarer å klassifisere er en valgfri oppgave som kun gir 1 poeng. Siden illustrasjonen forutsetter at elevene velger oppgavene som gir flest poeng blir ikke den uklassifiserte oppgaven med i illustrasjonen. Dermed har oppgavene som ble klassifisert fortsatt en øvre grense på 58 poeng. En gjennomgang av de klassifiserte oppgavene viser at elevene kan oppnå 50,5 poeng dersom de kun benytter imiterende resonnering. Ifølge Utdanningsdirektoratet (2005) er veiledende poenggrenser for karakteren 5, basert på forhåndssensuren til eksamen fra 2005, 41-51 poeng[28]. Poengsummen elevene kan oppnå ved kun å beherske imiterende resonnering tilsvarer dermed karakteren 5 og vurderingen ”over middels kompetanse”.

5.4 OPPSUMMERING

Eksamen fra 2000, 2003 og 2005 inneholder henholdsvis 77, 88 % og 82 % oppgaver elevene kan løse med imiterende resonnering. En konsekvens av å ha en så høy andel oppgaver av den typen er at elevene kan få gode karakterer, selv om de kun bruker resonnering basert på overfladiske egenskaper ved de matematiske komponentene som inngår i oppgaven. Jeg illustrerte sammenhengen ved å undersøke hvilken karakter elever som kun behersker imiterende resonnering kan oppnå på eksamen. Resultatet viser at elevene høyst sannsynlig vil bli vurdert til å ha oppnådd ”over middels kompetanse” og få karakteren 5 eller 6. Klassifiseringene av eksamensoppgavene fra 2000 viser at 18 % av oppgavene krever kreativ resonnering. Eksamen fra 2003 inneholder 11 % tilsvarende oppgaver, mens tilsvarende tall for eksamen fra 2005 er 17 %. Av de tre eksamenssettene, er det kun eksamen fra 2005 som inneholder en oppgave som krever globalt kreativt resonnement.

[28] Utdanningsdirektoratet (2005) påpeker at poenggrensene fra forhåndssensuren er veiledende, og at det er helhetsinntrykket som skal avgjøre hvilken karakter eleven får på eksamen.

Kapittel 6 DISKUSJON

Målet med masteroppgaven min har vært å undersøke sammenhengen mellom læreplanens fokus på problemløsning i matematikk og oppgavene elevene skal løse på eksamen. Med utgangspunkt i problemstillingen formulerte jeg tre forskningsspørsmål som skulle rettlede arbeidet mitt underveis, og bidra til et svar på problemstillingen[29]. Her diskuterer jeg resultatene, sett i forhold til forskningsspørsmålene og det matematikkdidaktiske forskningsfelt. Videre drøfter jeg analysene i studien.

6.1 RESULTATENE

Fokuset i masteroppgaven min har vært på problemløsning i læreplanen og på eksamen. For å kunne løse et problem[30], må eleven bruke eksisterende kunnskap og erfaringer fleksibelt og produsere noe nytt. Resonnering som kun baserer seg på hva eleven oppfatter som kjent, i stedet for å fokusere på grunnleggende, matematiske egenskaper til de involverte objektene, er ikke tilstrekkelig når eleven skal løse et problem. Boesens (2006) resultater viser at en stor andel av oppgaver på prøver som er konstruert av lærere, er imiterende oppgaver[31]. Min hypotese var at det samme gjelder for den norske avgangseksamen under L97, noe resultatene fra studien bekrefter. Resultatene mine viser at det kun er en liten del av eksamensoppgavene som krever at elevene behersker kreativ resonnering. Eksamen fra 2000, 2003 og 2005 inneholder henholdsvis 18 %, 11 % og 17 % oppgaver som krever kreativ resonnering, og da først og fremst lokal kreativ resonnering. De fleste oppgavene som krever kreativ resonnering kjennetegnes ved at elevene kjenner faktaene og prosedyrene de må benytte. Situasjonen og måten elevene skal benytte kunnskapene (og erfaringene sine) på er imidlertid ny. I likhet med Boesen (2006) klassifiserer jeg oppgaver som er løsbare med kreativ resonnering som

---

[29] De tre forskningsspørsmålene lyder som følger:

1. Utfordrer eksamensoppgavene i matematikk elevene til kreativ resonnering?
2. Hvordan er fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk?
3. Er det samsvar mellom eksamensoppgavene og fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk?

[30] Slik jeg har definert et problem.

[31] Jeg bruker betegnelsen imiterende oppgave på en oppgave som krever imiterende resonnering.

problemløsningsoppgaver[32]. Klassifiseringene gjelder for elever som har brukt Matematikk åtte-ni-ti og Mega på ungdomstrinnet.

Jeg gjør oppmerksom på at de fleste oppgavene som krever kreativ resonnering er valgfrie, altså har elevene mulighet til å velge de bort. På eksamen fra 2000 er det tre oppgaver som krever kreativ resonnering blant oppgavene alle elevene skal gjøre, på eksamen fra 2003 er det to oppgaver og på eksamen fra 2005 er det tre oppgaver. Det faktum at elevene kan velge bort kreative oppgaver[33], kombinert med en høy andel imiterende oppgaver på eksamen totalt sett, gjør at elevene kan oppnå gode resultater ved å imitere kjente svar og algoritmer. Ifølge Jensen og Gregersen (1998) vil en typisk elev i en eksamenssituasjon avstå fra å løse oppgaver han ikke anser som kjente. Årsaken er at det ofte ikke er oppgitt hvordan eleven skal starte med oppgavene, kombinert med en stor risiko for at han må gi opp. Det siste kan fremkalle følelser som krever trening for å håndtere.

Resultatene i studien min samsvarer med resultatene til Boesen (2006) for prøver konstruert av lærere. Flesteparten av eksamensoppgavene krever ikke at elevene må resonnere på en ny måte eller å ta hensyn til de grunnleggende egenskapene til de matematiske objektene som inngår i oppgaven. Elevene kan dermed løse eksamensoppgavene uten å ha en relasjonell forståelse av begrepene og metodene som brukes. Ved å bruke imiterende resonnering, kan de sammenligne eksamensoppgavene med teori, oppgaver eller eksempler de har sett/gjort i lærebøkene, og deretter løse oppgavene korrekt, uten at de nødvendigvis vet hvorfor løsningen er riktig. Størsteparten av oppgavene jeg klassifiserte til å være løsbare med imiterende resonnering, kunne løses med kjent algoritmisk resonnement (KAR). For at jeg kunne klassifisere en konkret eksamensoppgave til være mulig å løse med KAR, måtte lærebøkene inneholde minst tre lignende eksempler og oppgaver med hensyn på oppgavevariablene. Jeg må her fremheve at jeg anser klassifiseringene av den typen

[32] Jeg bruker problem og problemløsningsoppgave synonymt.

[33] Jeg bruker betegnelsen kreativ oppgave på en oppgave som krever kreativ resonnering.

som svært sikre. Årsaken er at hver av de undersøkte lærebøkene inneholder betraktelig mer enn tre oppgaver og eksempler, gjerne mellom 15 og 50.

Ved å ta hensyn til antall oppgaver elevene blir vurdert i på eksamen og antall poeng de kan få, viste jeg at elever kan oppnå vurderingen ”over middels kompetanse” ved kun å bruke imiterende resonnering. Det tilsvarer karakteren 5 eller 6. En konsekvens av det er at elever som ikke har relasjonell forståelse i matematikk, kan vurderes til være over middels kompetente i faget. Min vurdering er at signalet eksamen fra 2000, 2003 og 2005 sender til lærere og elever er at matematikk er et fag som primært går ut på å pugge fakta og prosedyrer. Elever som gjør det kan få en god karakter på eksamen. De tre eksamenene som er analysert støtter opp om et syn[34] på matematikk som memorisering av fakta og prosedyrer, basert på overfladiske egenskaper. Elever som har et slikt syn på matematikk, vil få vanskeligheter når de skal løse problemløsningsoppgaver fordi de ikke har en løsningsmetode klar til bruk (Pehkonen, 2003).

Analysen av læreplanverket for grunnskolen fra 1997 (KUF, 1996a) viser at læreplanen i matematikk har et stort fokus på utforskende aktiviteter. Jeg argumenterte videre for at problemløsning, slik jeg har definert det, er en type utforskende aktivitet. Elevene skal oppleve matematikk som en prosess, hvor de er aktive deltakere. De skal oppdage, undersøke, eksperimentere og reflektere, i tillegg til å formulere og løse problemer. Min tolkning av L97 er at fokuset på utforskende aktiviteter skal være en del av all matematikkundervisning, uavhengig av tema. Innledningen, felles mål for faget og mål for småskole-, mellom- og ungdomstrinnet fungerer som en overordnet struktur som skal inngå i alle hovedmomentene, og utforskende aktiviteter er svært fremtredende i alle de tre delene av læreplanen i matematikk.

En konsekvens av fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk er at problemløsning skal være en viktig del av matematikkundervisningen, inkludert vurdering i faget. Ifølge Utdanningsdirektoratet (2007c) skal eksamen teste elevenes

---

[34] Jeg bruker Pehkonen (2003) sin definisjon av syn på matematikk, nemlig et individs system av matematikkrelaterte forestillinger (beliefs). Pehkonen oversetter beliefs til oppfatninger. I likhet med Wæge (2007), oversetter jeg i stedet beliefs til forestillinger.

grad av måloppnåelse i forhold til målene i læreplanen i matematikk. Derfor bør eksamen teste elevenes måloppnåelse i forhold til utforskende aktiviteter, deriblant problemløsning. Elevene må få mulighet til å demonstrere at de behersker ukjente situasjoner, og at de er i stand til "å bruke sin fantasi, sine ressurser og sine kunnskaper til å finne løsningsmetoder og -alternativer" (KUF, 1996a, s. 158). Resultatene mine viser at eksamen i matematikk i liten grad tester elevenes måloppnåelse innenfor problemløsning. Eksamensoppgavene tester først og fremst i hvilken grad elevene husker fakta eller prosedyrer, ikke om de er i stand til å komme fram til slikt på egen hånd. Læreplanens overordnede syn på matematikk som en prosess gjenspeiler seg ikke i eksamensoppgavene.

Forskning viser at eksamen har en tilbakevirkende effekt på undervisningen (se for eksempel Jensen (2007), Michelsen (2001), Niss (1993), Niss og Jensen (2002) og Wilson (2007)). Eksamenskrav og -former påvirker hva elever og lærere ser på som sentralt i matematikkundervisningen, og lærerne bruker mer tid på oppgaver det er vanlig at elevene får på eksamen (Michelsen, 2001; Wilson, 2007). Som nevnt tidligere, er ordtaket "What you test is what you get!" mye brukt for å illustrere sammenhengen. Matematikkeksamen gir elever og lærere inntrykk av at fokusering på fakta og prosedyrer er viktig i matematikk, noe som igjen påvirker undervisningen. Så lenge eksamen ikke støtter opp om fokuset på utforskende aktiviteter i læreplanen, vil det være svært vanskelig å endre matematikkundervisningen i den norske skolen fra dagens lærebok- og oppgavestyrte undervisning til en undervisning preget av oppdagende, undersøkende og problemløsende aktiviteter.

6.2 Analysene

Undersøkelsen i studien min består av analyser av læreplaner, eksamensoppgaver og lærebøker. I dette delkapittelet diskuterer jeg analysene med spesielt fokus på gjennomføring og mulige endringer.

Den første analysen jeg gjorde i masteroppgaven var av M87 og L97. For å svare på forskningsspørsmålet om læreplanens fokus på problemløsning, måtte jeg tolke innholdet i læreplanen i matematikk. Jeg argumenterte tidligere i masteroppgaven for at jeg undersøker den intenderte læreplanen. Til tross for at jeg analyserer og tolker læreplanen, tar jeg den ikke i bruk. Lærebøkene og eksamenssettene er imidlertid en del av den implementerte læreplanen, altså en tolkning og implementering av den intenderte læreplanen. Den intenderte og den implementerte læreplanen befinner seg på ulike nivåer, og de kan være forskjellige. Sammenligning av elementer fra to ulike læreplannivåer kan være problematisk siden det ene nivået er en tolkning av det andre. I likhet med lærebokforfattere og myndighetene som lager eksamen, må jeg tolke den intenderte læreplanen. Resultatet er tre tolkninger som kan være svært forskjellige, en ren tolkning og to beregnet på implementering av læreplanen. Skolemyndighetenes mål er imidlertid at eksamenssettene i størst mulig grad skal gjenspeile den intenderte læreplanen, altså målene i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2007c). Dermed bør det etter min vurdering være mulig å sammenligne den intenderte læreplanen med eksamensoppgavene, slik jeg har gjort i studien min, selv om eksamen er en del av den implementerte læreplanen.

I den andre analysen var eksamensoppgavene og lærebøkene i fokus. Analyseverktøyet jeg benyttet var hentet fra Boesen (2006), og målet var å skille mellom imiterende og kreative oppgaver. I undersøkelsen min har analyseverktøyet fungert godt. Det har stort sett vært enkelt å klassifisere eksamensoppgavene, og det gjelder særlig oppgavene som er klassifisert til å være mulig å løse med minnebasert eller algoritmisk resonnering. Eksamensoppgavene som ligger i grenseland mellom to klassifikasjoner har vært vanskeligst å analysere. Det gjelder spesielt oppgaver som ligger i skillet mellom lokal kreativ resonnering (LKR) og global kreativ resonnering (GKR). Hvor store elementer av kreativ resonnering kreves egentlig før oppgaven krever GKR? Den ene oppgaven jeg klassifiserte til å være mulig å løse med GKR er et eksempel på en vanskelig oppgave å klassifisere. Jeg var veldig i tvil om eksamensoppgaven krevde tilstrekkelig kreativ resonnering til at jeg kunne klassifisere den som GKR. I slike sammenhenger tror jeg at en kvalitativ undersøkelse hvor elever ble observert mens de løste oppgavene ville vært svært nyttig.

Analyseverktøyet baserer seg på at et problem er en oppgave hvor problemløseren ikke vet hvordan han skal fortsette, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes. Den gitte definisjonen, som er den jeg bruker i studien min, tar ikke hensyn til den affektive dimensjonen av et problem, for eksempel engasjement, motivasjon, følelsen av å eie problemet og et ønske om å finne en løsning. Dersom jeg hadde hatt et analyseverktøy som tok hensyn til den affektive dimensjonen tilgjengelig, ville jeg brukt det i stedet for analyseverktøyet til Boesen (2006). Et eksempel på en slik studie kan være å videofilme elevene mens de løser oppgaver og intervjue de etterpå. På den måten kunne jeg spørre hva de tenkte og følte underveis i løsningsprosessen, uten å påvirke de mer enn nødvendig under arbeidet med oppgavene. En slik undersøkelse kan også fungere som en validitetssjekk for å vurdere om klassifiseringene mine er pålitelige, sett i forhold til hvilken type resonnering elevene faktisk bruker for å løse eksamensoppgavene.

Det er viktig å påpeke at analysene mine baserer seg på en gruppe elever[35], og ikke enkeltelever. Klassifiseringene av eksamensoppgavene baserer seg på at alle elevene som har brukt de aktuelle lærebøkene har noe til felles, for eksempel kjennskap til teori, svar og algoritmer. En konsekvens av det er at det forutsettes at elevene har sett på alle eksemplene, løst alle oppgavene og lest all teori i minst en av de to lærebøkene. Det er ikke sannsynlig at elever på ungdomstrinnet oppfyller det kravet. Mange av oppgavene i lærebøkene jeg har brukt i analysen er nemlig inndelt i nivåer med ulik vanskelighetsgrad. I Mega er mange av oppgavene inndelt i tre kategorier, blå, gul og rød, hvor blå inneholder de enkleste oppgavene og rød de vanskeligste. Tilsvarende inndeling i Matematikk åtte-ni-ti er i kategori 1, 2 og 3, hvor 1 er enklest og 3 er vanskeligst. En mulig ny undersøkelse kan derfor være å ta hensyn til nivåinndelingene i analysen. Resultatene fra en slik undersøkelse vil være mer troverdig i forhold til hvilke oppgaver som i praksis vil være henholdsvis kreative og imiterende oppgaver for elever som har arbeidet med en bestemt nivåinndeling. Ulempen er at elever sjelden følger samme nivåinndeling gjennom hele ungdomstrinnet

Videre har jeg ikke tatt hensyn til hva elevene lærer i andre fag i grunnskolen. En av eksamensoppgavene jeg ikke klarte å klassifisere, kunne jeg kanskje klassifisert dersom jeg hadde gjort det. Oppgaven handlet om å tilpasse en matoppskrift beregnet på fire

[35] Alle elever som har brukt Mega eller Matematikk åtte-ni-ti i undervisningen.

personer slik at det ble nok mat til seks personer. Matematikk åtte-ni-ti inneholdt en lignende oppgave, mens Mega inneholdt tre lignende oppgaver. Analysene baserer seg på en begrenset del av elevenes læringsmiljø, nemlig lærebøkene i matematikk. Forskning har imidlertid vist at lærebøkene utgjør en stor del av elevens erfaringsgrunnlag, både teoretisk og gjennom oppgaver (Boesen, 2006), og ifølge Alseth m. fl. (2003) er undervisningen i den norske grunnskolen styrt av lærebøker og oppgaver.

Etter at jeg begynte å analysere eksamensoppgavene med Boesens (2006) analyseverktøy, kom jeg over flere eksamensoppgaver hvor elevene skulle lage egne oppgaver. Eksamensoppgavene var ikke mulig å klassifisere som løsbare med minnebasert resonnering (MR) eller algoritmisk resonnering (AR) på grunn av forskjeller med hensyn på oppgavevariablene. Analysen av lærebøkene viste imidlertid at elevene har laget mange oppgaver i ulike sammenhenger før. I tillegg kan oppgaver de har løst ellers i lærebøkene, fungere som modeller når de skal lage egne oppgaver. Elevene har dermed en stor base med oppgaver som grunnlag når de skal lage egne oppgaver på eksamen, og min konklusjon er at slike oppgaver kun krever imiterende resonnering. Analysene mine viste at det gjaldt for alle slike oppgaver på eksamenssettene fra 2000, 2003 og 2005. Med det som bakgrunn valgte jeg å legge til en ekstra klassifisering til analyseverktøyet, som jeg har kalt kjent formulerende resonnering (KFR). Jeg vil her påpeke at det er mulig å klassifisere KFR-oppgavene som løsbare med annen type imiterende resonnering (ATIR). ATIR er en samlepott for alle oppgavene som ikke kan klassifiseres som mulig å løse med MR, AR eller kreativ resonnering. Jeg syntes imidlertid at det er viktig å synliggjøre at KFR-oppgavene krever en type resonnering som Boesen (2006) ikke møtte på i sine analyser av svenske nasjonale og lærerkonstruerte prøver[36]. Oppgavene er spesielle for den norske avgangsprøven i matematikk. Jeg har derfor valgt å klassifisere slike oppgaver for seg.

[36] Boesen fortalte at han ikke møtte på slike oppgaver i e-postkorrespondanse i mai 2009.

6.3 KONKLUSJON

Problemstilling for masteroppgaven er som følger: Hvordan er sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk i grunnskolen og oppgavene som blir gitt på eksamen? Ved å analysere læreplanen i matematikk fra L97, lærebøker og eksamensoppgaver har jeg kommet frem til at det er en liten sammenheng. Resultatene mine viser at eksamen ikke utfordrer elevene til kreativ resonnering i særlig stor grad (forskningsspørsmål 1). Elevene kan få gode karakterer på eksamen uten å resonnere kreativt. Videre støtter matematikkeksamen opp om et syn på matematikk som memorisering av fakta og prosedyrer. Et slikt syn kan skape vanskeligheter når elevene skal løse problemer. Læreplanen har et stort fokus på utforskende aktiviteter, som problemløsning[37] er et eksempel på (forskningsspørsmål 2). Elevene skal oppdage, undersøke og eksperimentere, i tillegg til å løse problemer. Samsvaret mellom eksamensoppgavene og fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk er lite (forskningsspørsmål 3). Eksamen inneholder en liten andel problemløsningsoppgaver, og de få problemløsningsoppgavene som er der, er gjerne valgbare. En konsekvens er at elevene kan oppnå gode karakterer på eksamen uten å gjøre annet enn å imitere svar og algoritmer de kjenner fra lærebøkene.

Studien min har bidratt til det matematikkdidaktiske forskningsfeltet på flere måter. Jeg har undersøkt hvordan M87 og L97 presenterer og fokuserer på problemløsning. Læreplanverkene har blitt analysert av ulike forskere tidligere, men ikke med tilsvarende fokus. Videre har jeg prøvd ut et analyseverktøy som ikke har vært brukt i den norske grunnskolen før. Analyseverktøyet viste seg å fungere godt, også for norske eksamener, og jeg har stor tro på at det kan brukes i tilsvarende undersøkelser senere. Jeg har også utviklet en egen klassifisering for en type oppgaver jeg fant i alle eksamenssettene, nemlig oppgaver hvor elevene skal lage egne oppgaver. Studien har gitt mer kunnskap om den norske avgangsprøven. Jeg hadde en hypotese om at en god del av eksamensoppgavene var imiterende oppgaver, noe resultatene fra studien bekrefter. Videre viste jeg at elever som kun behersker imiterende resonnering kan

[37] Slik jeg har definert problemløsning.

oppnå karakteren 5 eller bedre på eksamen. Resultatet bør være en vekker for forskere, og ikke minst for myndighetene som konstruerer eksamen.

Kapittel 7 Avslutning

I masteroppgaven har jeg undersøkt sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk og oppgavene som gis på eksamen, og studien har gitt økt kunnskap om sammenhengen. Resultatene viser at eksamensoppgavene i liten grad gjenspeiler fokuset på problemløsning i læreplanen. Eksamensoppgavene legger vekt på pugging av fakta og prosedyrer, mens læreplanen ønsker at elevene skal oppdage, undersøke, eksperimentere og løse problemer. Resultatene gir grunn til bekymring siden forskning viser at eksamen har en tilbakevirkende effekt på undervisningen. Eksamen, slik den fremstår på eksamenssettene jeg har analysert, støtter opp om et syn på matematikk som et fag hvor pugging av fakta og regler er viktig, til tross for at læreplanen har et annet syn på matematikk.

Jeg kom frem til resultatene ved å benytte Boesens (2006) analyseverktøy som skiller mellom imiterende og kreativ resonnering. Analyseverktøyet har vist seg å fungere godt til å analysere eksamensoppgaver fra grunnskolen og avgjøre om en oppgave er en problemløsningsoppgave eller ikke. Min vurdering er at analyseverktøyet kan være svært nyttig for lærere når de skal innhente eller lage problemløsningsoppgaver til bruk i matematikkundervisningen. Lærerne kan relativt enkelt finne ut hvilke oppgaver som kun krever imiterende resonnering siden kriteriene er klare, og på den måten blir det lettere å skille ut oppgavene som faktisk er problemløsningsoppgaver. Jeg antar at lærerne sannsynligvis har et godt kjennskap til lærebøkene elevene deres benytter, spesielt lærere som har brukt samme lærebok i noen år. Lærerne vil da kunne klassifisere oppgaver raskt og effektivt. De behøver antakeligvis ikke å undersøke hver eneste side i lærebøkene slik jeg måtte gjøre. Analyseverktøyet kan også være nyttig for myndighetene som konstruerer eksamen i matematikk, men siden de i likhet med meg må ta hensyn til flere lærebøker, vil arbeidet være mer tidkrevende enn for lærerne.

Undersøkelsene mine tok utgangspunkt i læreplanen i matematikk fra L97, i tillegg til lærebøker og eksamensoppgaver basert på L97. I dag er Kunnskapsløftet (LK06), et kompetansebasert læreplanverk, gjeldene for grunnskolen i Norge (Utdanningsdirektoratet, 2006). LK06 har et stort fokus på utvikling av matematisk kompetanse og grunnleggende ferdigheter, og fokuset på problemløsning kommer tydelig fram i de to delene ”Føremål med faget” og ”Grunnleggende ferdigheter”. Eksamen i matematikk for grunnskolen er noe endret i forhold til L97. Under L97 bestod eksamen av tre deler, og eleven hadde tilgang på elevbøker og lommeregnere under hele eksamenstiden. Etter innføringen av LK06, består matematikkeksamen av to deler, ikke tre som under L97. Del 1 er uten hjelpemidler, kun skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler er tillatt. På del 2 er alle hjelpemidler tillatt, med unntak av internett og andre kommunikasjonsverktøy. Eksamenstiden er på fem timer. Jeg har ikke klart å finne eksempler på eksamensoppgaver i matematikk fra grunnskolen[38], og jeg kan derfor ikke diskutere eventuelle likheter eller forskjeller i forhold til eksamensoppgavene gitt under L97.

7.1 Nye forskningsspørsmål

Arbeidet med masteroppgaven har vært spennende, men krevende. Jeg har lest store mengder litteratur på kort tid, noe som har gjort at hjernen min har arbeidet mye overtid for å sortere tanker og ideer. Men jo mer jeg har lest og reflektert, jo mer har jeg ønsket å lære. Til tross for at det eksisterer mye forskning innenfor problemløsning og vurdering, er fortsatt mye av forskningsfeltet uutforsket. Jeg er glad for at jeg har fått muligheten til utforske en liten del! I forbindelse med avslutningen av arbeidet kom jeg over en artikkel hvor Utdanningsdirektoratet (2009) opplyser at et konsulent firma har fått i oppdrag å evaluere utvalgte eksamener i matematikk basert på LK06. For meg var det en bekreftelse på at studier av vurdering i matematikk er viktige.

I studien min har jeg kun tatt for meg en begrenset del av forskningsfeltet som omhandler vurdering av matematisk problemløsning. Jeg har undersøkt hvilken type resonnering det er sannsynlig at elevene benytter med utgangspunkt i lærebøkene, men jeg har ikke undersøkt hvilken type resonnering elevene faktisk bruker for å løse eksamensoppgavene. Studien min viser at eksamen for grunnskolen inneholder en stor andel imiterende oppgaver, men hvordan ville resultatet blitt dersom undersøkelsen

[38] Se vedlegg 2 for informasjon om søkeprosedyre.

hadde blitt gjort på eksamener fra den videregående skolen eller universitetet? Et interessant spørsmål, som jeg selv kunne tenke meg å undersøke, er hvordan sammenhengen mellom Kunnskapsløftets fokus på problemløsning og oppgavene elevene skal løse på eksamen er? Mitt innblikk i Kunnskapsløftets læreplan i matematikk, basert på en rask gjennomlesing av læreplanen, gir inntrykk av at fokuset på problemløsning og utvikling av problemløsningskompetanse er minst like stort i Kunnskapsløftet som i L97. Jeg tror det er gode muligheter for at analyseverktøyet jeg har anvendt i min studie kan benyttes for å undersøke det nærmere. Det kunne også være interessant å gjøre en studie av eksamensoppgaver og læreplanverk fra en lengre tidsperiode for å se om samsvaret mellom læreplanens og eksamens fokus på problemløsning er større, mindre eller uendret.

REFERANSELISTE

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). *Endring og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus*. Notodden: Telemarksforsking.

Antonius, S. (2003). *Modellering til eksamen: En analyse av modellering, IT og eksamen i matematik på højere handelseksamen*. Doktoravhandling. Odense: Syddansk universitet.

Barkatsas, A. N., & Hunting, R. (1995). A review of recent research on cognitive, metakognitive and affective aspects of problem solving. *Nordic studies in mathematics education, 4*(4), 7-30.

Barnes, M., Clarke, D., & Stephens, M. (2000). Assessment: The engine of systemic curricular reform? *Journal of curriculum studies, 32*(5), 623-650.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51-70). Bergen: Fagbokforlaget.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (s. 45-56). New York: Springer.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: Comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. Doktoravhandling. Umeå (Sverige): Umeå universitet.

Botten, G. (2003). *Meningsfylt matematikk: Nærhet og engasjement i læringen*. Bergen: Caspar forlag.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational studies in mathematics, 58*(1), 45-75.

Danielsen, I.-J., Skaar, K., & Skaalvik, E. M. (2007). *De viktige få: Analyse av Elevundersøkelsen 2007*. Kristiansand: Oxford research.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (1997). The affective domain in mathematical problem solving. I E. Pehkonen (Red.), *Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, s. 209-216). Helsinki: University of Helsinki.

Eksamenssekretariatet (1999). Skriftlige avgangsprøver i matematikk etter L97. Hentet fra www2.udir.no/eldre_informasjonsskriv/1999/gr-99/i-gr-99-004%20Vedlegg%204.doc (01.06.2009)

Ernest, P. (2000). Why teach mathematics? I S. Bramall & J. White (Red.), *Why learn maths?* (s. 1-14). London: London university.

Ernest, P. (2004). Relevance versus utility: Some ideas on what is means to know mathematics. I B. Clarke, D. M. Clarke, D. V. Lambdin, F. K. Lester, G. Emanuelsson, B. Johansson, A. Wallby & K. Wallby (Red.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (s. 313-327). Göteborg: National center for mathematics education (NCM).

Frøyland, E. (1965). *Matematikk i skolen: Hvorfor, hva og hvordan?* Hovedfagsoppgave. Oslo: Universitetet i Oslo.

Geiger, V., & Galbraith, P. (1998). Developing a diagnostic framework for evaluating student approaches to applied mathematics problems. *International journal of mathematical education in science and technology, 29*(4), 533-559.

Gjone, G. (1994). Matematikkundervisningen mellom nytte og danning. *Tangenten, 4*, 3-11.

Gjone, G. (2000). Vurdering i matematikk. I G. Gjone & T. Onstad (Red.), *Mathema 2000: Festskrift til Ragnar Solvang* (s. 46-67). Oslo: NKS-forlaget.

Gjone, G. (2003). Læreplaner og læreplanutvikling i matematikk. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 261-287). Bergen: Fagbokforlaget.

Goldstein, F. C., & Levin, H. S. (1987). Disorders of reasoning and problem-solving ability. I M. J. Meier, A. L. Benton & L. Diller (Red.), *Neuropsychological rehabilitation* (s. 327-354). New York: Churchill livingstone.

Gregersen, P., & Jensen, T. H. (1998). *Problemløsning og modellering i et almendannende matematikundervisning*. Masteroppgave. Roskilde: Roskilde universitetscenter.

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S., & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003* Oslo: Universitetet i Oslo.

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology, 87*(1), 18-32.

Heuvel-Panhuizen, M. v. d., & Becker, J. (2003). Towards a didactic model for assessment design in mathematics education. I A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Red.), *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht (Nederland): Kluwer academic publishers.

Hornby, A. S. (Ed.) (2005) *Oxford advanced learner's dictionary of current English*. Oxford: Oxford university press.

Imsen, G. (2003). *Skolemiljø, læringsmiljø og elevutbytte: En empirisk studie av grunnskolens 4., 7. og 10. trinn*. Trondheim: Tapir akademisk forlag.

Imsen, G. (2006). *Lærerens verden: Innføring i generell didaktikk*. Oslo: Universitetsforlaget.

Internettforlaget (2009). Matematikk for ungdomstrinnet: Systematisk oppgavesamling med løsninger. Hentet fra http://matematikk.info (26.05.2009)

Jensen, T. H. (2007). *Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt - hvorfor ikke?* Doktoravhandling. Roskilde: Roskilde universitet.

Jørgensen, P. S. (2001). Kompetence - overvejelser over et begreb. *Nordisk psykologi, 53*(3), 181-208.

Kleve, B. (2007). *Mathematics teachers' interpretation of the curriculum reform, L97, in Norway*. Doktoravhandling. Kristiansand: Agder university college.

KUF (1996b). *Stortingsmelding nr 47 (1995-96): Om elevvurdering, skolebasert vurdering og nasjonalt vurderingssystem*. Oslo: Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement (KUF).

Kunnskapsdepartementet (1998). *Opplæringslova: Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa*. Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Kunnskapsdepartementet (2006). *Forskrift til opplæringslova (2006-06-23 nr 724).* Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education, 25*(6), 660-675.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Lambdin Kroll, D. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. I D. B. McLeod & V. M. Adams (Red.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (s. 75-88). New York: Springer.

Lithner, J. (2005). *A framework for analysing qualities of mathematical reasoning: Version 3*. Umeå (Sverige): Umeå universitet.

Mason, J., & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem-solving*. Geelong (Australia): Deakin university press.

Mcleod, D. B. (1989). The role of affect in mathematical problem solving. I D. B. McLeod & V. M. Adams (Red.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (s. 20-36). New York: Springer.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 575-595). New York: Macmillan publishing company.

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. Thousand Oaks (USA): Sage publications, Inc.

Michelsen, C. (2001). *Begrebsdannelse ved domæneudvidelse: Elevers tilegnelse af funktionsbegrebet i et integreret undervisningsforløb mellem matematik og fysik*. Doktoravhandling. Odense: Syddansk universitet.

Niss, M. (1993). Assessment in mathematics education and its effects: An introduction. I M. Niss (Red.), *Investigations into assessment in mathematics education: An ICMI study* (s. 1-30). Dordrecht (Nederland): Kluwer academic publishers.

Niss, M. (2003). Mål for matematikkundervisningen. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 288-332). Bergen: Fagbokforlaget.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling av matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.

NOU (2003). *I første rekke: Forsterket kvalitet i grunnopplæring for alle*. Oslo: Utdannings- og forskningsdepartementet.

OECD (2001). *Knowledge and skills for life: First results from the OECD programme for international student assessment (PISA) 2000*. Paris: OECD publications.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris: OECD publications.

Palm, T., Bergqvist, E., Eriksson, I., Hellström, T., & Häggström, C.-M. (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser for uppgiftskonstruktion*. Umeå (Sverige): Umeå universitet.

Palm, T., Boesen, J., & Lithner, J. (2005). *The requirements of mathematical reasoning in upper secondary level assessment*. Umeå (Sverige): Umeå universitet.

Pehkonen, E. (2003). Lærere og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikkundervisningen. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 154-181). Bergen: Fagbokforlaget.

Philippou, G. N., & Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational studies in mathematics, 35*(2), 189-206.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: John Wiley & sons, Inc.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton university press.

Robson, C. (2002). *Real world research*. Oxford: Blackwell publishing.

Schoenfeld, A. H. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography*. Washington, D.C. : Mathematical association of America.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic press, Inc.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior *Journal for Research in Mathematics Education 20*(4), 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334-370). Reston (USA): The national council of teachers of mathematics (NCTM).

Schoenfeld, A. H. (1993). Teaching mathematical thinking and problem solving. *Sånn, ja! Rapport fra en konferanse om matematikk-didaktikk og kvinner i matematiske fag* (s. 67-89). Oslo: Norges forskningsråd.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. I A. H. Schoenfeld (Red.), *Mathematical thinking and problem solving* (s. 287-304). Hillsdale (USA): Lawrence erlbaum associates, Inc.

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 69-107). Charlotte (USA): Information age publishing inc.

Sjøberg, S. (2004). *Naturfag som allmenndannelse: En kritisk fagdidaktikk*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Skarheim, P., & Først, E. (2004). Hva er Utdanningsdirektoratet? *Lektorbladet: Magasin for fag, skole og utdanning, 6*, 7-8.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale (USA): Lawrence erlbaum associates, Inc.

Solstad, K. J., & Rønningen, W. (2003). *Likeverdig skole i praksis: Synteserapport*. Bodø: Nordlandsforskning.

Sundback, A. (2005). Skolan, läroplanen och politik. Hentet fra http://registration.yourhost.is/nopsa2005/papers/Anna.pdf (14.02.2009)

UFD (2004). *Stortingsmelding nr 30 (2003-2004): Kultur for læring*. Oslo: Utdannings- og forskningsdepartementet.

Utdanningsdirektoratet (2005). Forhåndssensur: Skriftlig avgangsprøve i matematikk 2005. Hentet fra http://www.udir.no/upload/Eksamen/Grunnskolen/2005/Sensorveiledninger/Matematikk%20GG4020_forhandssensur_V2005%20(pdf).pdf (16.05.2009)

Utdanningsdirektoratet (2007a). Nasjonale prøver 2007. Hentet fra http://www.utdanningsdirektoratet.no/templates/udir/TM_Tema.aspx?id=876 (23.02.2009)

Utdanningsdirektoratet (2007b). Presisering av forskrifter om underveis- og sluttvurdering. Hentet fra http://udir.no/templates/udir/TM_Artikkel.aspx?id=3173 (23.02.2009)

Utdanningsdirektoratet (2007c). Vurderingsveiledning: Matematikk - sentralt gitt eksamen. Hentet fra http://udir.no/upload/Eksamen_eksempeloppgaver/Vurderingsveiledning_Matematikk_2008.pdf (23.02.2009)

Utdanningsdirektoratet (2009). Evaluering av eksamen etter LK06. Hentet fra http://www.udir.no/Artikler/Evaluering-av-eksamen-etter-LK06/ (01.06.2009)

Wedege, T. (2003). Kompetence (begreber) som konstruktion. *Dansk pædagogisk tidsskrift, 3*, 64-75.

Wedege, T., Skott, J., Wæge, K., & Henningsen, I. (2006). *Changing views and practices? A study of the KappAbel mathematics competition*. Trondheim: Norwegian center for mathematics education.

Wilson, L. D. (2007). High stakes test in mathematics. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 1099-1110). Charlotte (USA): Information age publishing inc.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning*. Doktoravhandling. Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU).

LÆREPLANER OG LÆREBØKER

Grunnskolerådet (1987). *Veiledende årsplaner: Matematikk: Veiledning til mønsterplan for grunnskolen 1987*. Oslo: Grunnskolerådet og Universitetsforlaget.

Gulbrandsen, J. E., & Melhus, A. (1997a). *Mega 8A: Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: NKS-Forlaget.

Gulbrandsen, J. E., & Melhus, A. (1997b). *Mega 8B: Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: NKS-Forlaget.

Gulbrandsen, J. E., & Melhus, A. (1998). *Mega 9A: Matematikk for ungdomssteget*. Oslo: NKS-Forlaget.

Gulbrandsen, J. E., & Melhus, A. (1999a). *Mega 9B: Matematikk for ungdomssteget*. Oslo: NKS-Forlaget.

Gulbrandsen, J. E., & Melhus, A. (1999b). *Mega 10A: Matematikk for ungdomssteget*. Oslo: NKS-Forlaget.

Gulbrandsen, J. E., & Melhus, A. (1999c). *Mega 10B: Matematikk for ungdomssteget*. Oslo: NKS-Forlaget.

KUD (1987). *Mønsterplan for grunnskolen (M87)*. Oslo: Kirke- og utdanningsdepartementet og Aschehoug.

KUF (1996a). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen (L97)*. Oslo: Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement (KUF).

Martinsen, R., Oldervoll, T., & Pedersen, J.-E. (1997a). *Matematikk åtte-ni-ti: 8: Grunnbok*. Oslo: J. W. Cappelens forlag A. S.

Martinsen, R., Oldervoll, T., & Pedersen, J.-E. (1997b). *Matematikk åtte-ni-ti: 8: Oppgavesamling*. Oslo: J. W. Cappelens forlag A. S.

Martinsen, R., Oldervoll, T., & Pedersen, J.-E. (1998a). *Matematikk åtte-ni-ti: 9: Grunnbok*. Oslo: J. W. Cappelens forlag A. S.

Martinsen, R., Oldervoll, T., & Pedersen, J.-E. (1998b). *Matematikk åtte-ni-ti: 9: Oppgavesamling*. Oslo: J. W. Cappelens forlag A. S.

Martinsen, R., Oldervoll, T., & Pedersen, J.-E. (1999). *Matematikk åtte-ni-ti: 10: Grunnbok*. Oslo: J. W. Cappelens forlag A. S.

Martinsen, R., Oldervoll, T., Pedersen, J.-E., & Enger, K. (1999). *Matematikk åtte-ni-ti: 10: Oppgavesamling*. Oslo: J. W. Cappelens forlag A. S.

Utdanningsdirektoratet (2006). Læreplanverket for Kunnskapsløftet (LK06). Hentet fra http://www.udir.no/templates/udir/TM_UtdProgrFag.aspx?id=2103 (14.02.2009)

VEDLEGG 1: ANALYSESKJEMA

Oppgavenummer:	
A1. Eksamensoppgaven – Svar og løsninger	
A2. Eksamensoppgaven – Andre egenskaper	
1. Oppdrag	
2. Eksplisitt informasjon om situasjonen	
3. Representasjoner	
4. Språklige egenskaper	
5. Eksplisitt formulerte hint	
6. Responsformat	
B1. Lærebøker – Svar og løsninger	
a. Lete etter lignende oppgaver og eksempler som kan bli løst med samme svar eller algoritme som eksamensoppgaven	
b. Lete i teorien i lærebøker for å finne deler som kan inneholde svar eller algoritme, for eksempel regler, teoremer, fakta osv.	
B2. Lærebøker – Andre egenskaper	
a. Gjennomgang av lærebøker for å lete etter oppgaver og eksempler som ligner på eksamensoppgaven med hensyn på oppgavevariablene	
1. Oppdrag	
2. Eksplisitt informasjon om situasjonen	
3. Representasjoner	
4. Språklige egenskaper	
5. Eksplisitt formulerte hint	
6. Responsformat	
b. Lete i teorien i lærebøker etter informasjon som er nært relatert til eksamensoppgaven med hensyn på oppgavevariablene	
1. Oppdrag	
2. Eksplisitt informasjon om situasjonen	
3. Representasjoner	
4. Språklige egenskaper	
5. Eksplisitt formulerte hint	
6. Responsformat	
C. Konklusjon og argumentasjon for en bestemt resonneringstype	
Type resonnering	

VEDLEGG 2: SØKEPROSEDYRE

Jeg brukte følgende søkekilder og ulike kombinasjoner av de gitte søkeordene (både på norsk og engelsk) når jeg forsøkte å finne informasjon om følgende (siste søk ble gjort 1. juni 2009):

FORHÅNDSSENSUR TIL EKSAMEN 2000 OG 2003

Søkekilder

- www.google.com
- www.regjeringen.no
- www.udir.no
- www.kvasir.no
- http://www.eric.ed.gov/
- http://www.springerlink.com/
- http://www.jstor.org/

Søkeord

matematikk, avgangsprøve, 2000, 2003, eksamen, grunnskole, l97, reform 97, karakter, måloppnåelse, grad av måloppnåelse, kompetanse

EKSEMPLER PÅ EKSAMENSOPPGAVER FRA KUNNSKAPSLØFTET (LK06)

Søkekilder

- www.google.com
- www.regjeringen.no
- www.udir.no
- www.kvasir.no
- www.skolenettet.no

Søkeord

matematikk, eksamen, avgangsprøve, 2000, 2003, grunnskole, sensor, sensur forhåndssensur, sensorveiledning, Kunnskapsløftet, LK06, K06, karakter, måloppnåelse, grad av måloppnåelse, kompetanse