Algebra
Læring, undervisning og læremidler

Margrethe Naalsund

Norges miljø- og biovitenskapelige universitet

ARK & APP (2013-2016)

- Undersøkt valg og bruk av læremidler i fire fag i grunnopplæringen; samfunnsfag, engelsk, naturfag og matematikk
- To spørreundersøkelser og 12 case-studier
- Algebra 5.klasse, 3 ukers observasjon
- Anders Kluge og Jan Arild Dolonen ved UiO

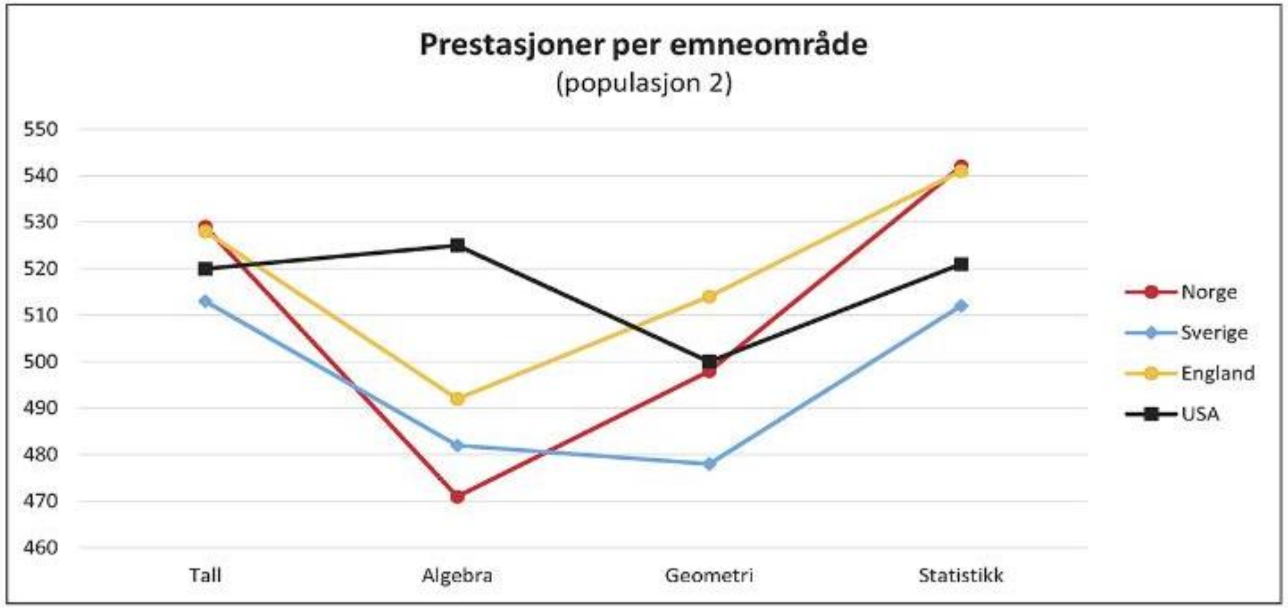
Gilje et al. (2016)

Hvorfor algebra?

- Algebra er et effektivt verktøy for å utforske, analysere og representere matematiske begreper og ideer, samt for å beskrive og modellere forhold og sammenhenger i hverdagsfenomener.
- Mye av matematikken i skolen bygger på algebra. Viktig for å lykkes med videre opplæring både i matematikkfaget og i fag og studier som bygger på algebraisk kunnskap (f.eks. fysikk, ingeniørstudier, informatikk, finans, medisin).
- Vanskelig for mange elever og mange opplever det som en meningsløs aktivitet.

Kieran (2007); NCTM (2008)

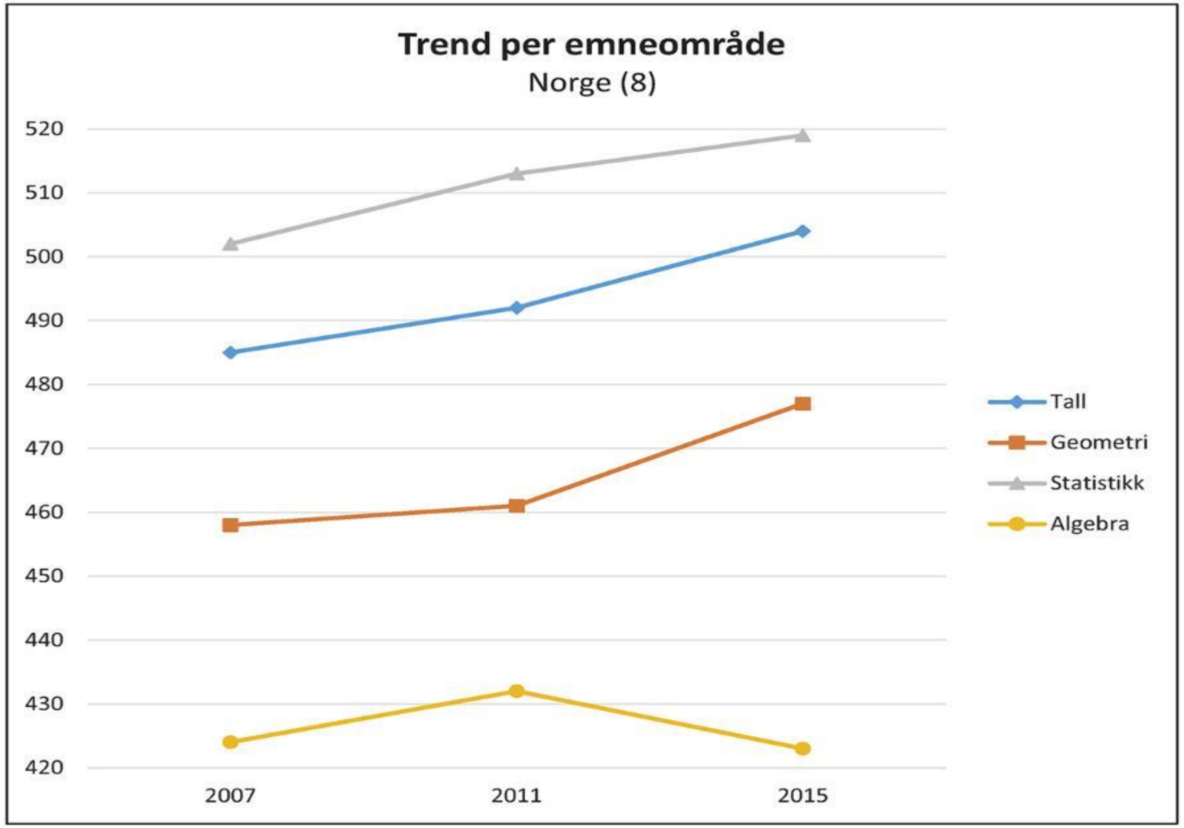
TIMSS 2015, 9.trinn



Figur 2.6. Prestasjoner på emneområder i matematikk for Norge og referanselandene, populasjon 2.

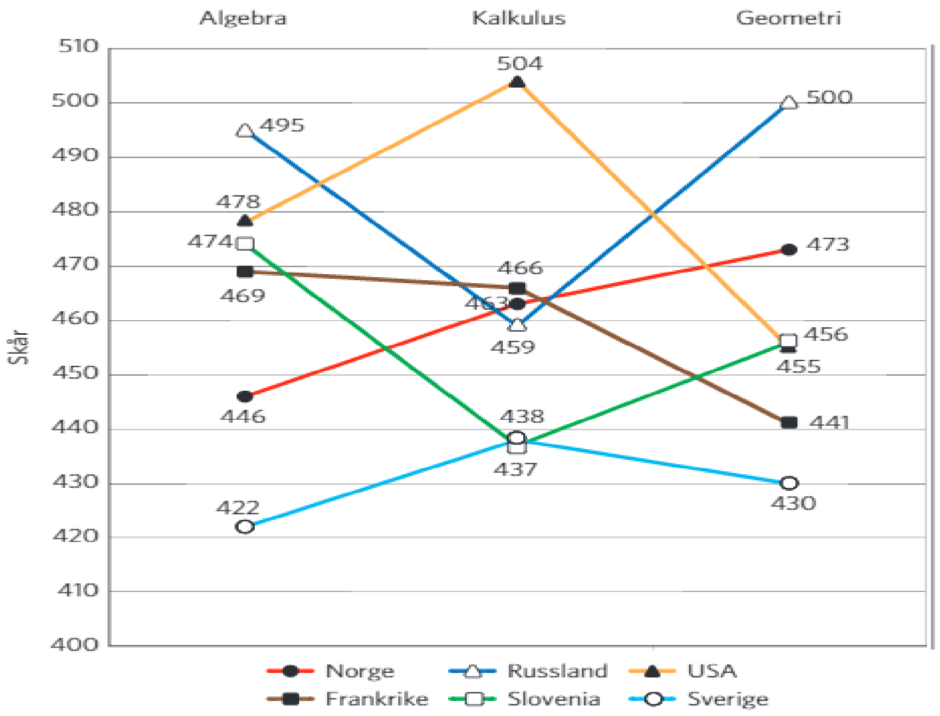
Bergem, Kaarstein og Nilsen (2016)

TIMSS 2015, 8.trinn



Bergem, Kaarstein og Nilsen (2016)

TIMSS Advanced 2015, R2



Figur 2.3 Prestasjoner fordelt på fagområder i matematikk, TIMSS Advanced 2015, utvalgte land.

Grønmo, Hole og Onstad (2016)

Læremidler

Læreplan

Elevers motivasjon, holdninger, interesse, følelser…

Hvorfor er algebra en utfordring?

Læreres holdninger, interesse, kompetanse

Elevers kompetanse - kognitive prosesser

Undervisnings metoder, arbeidsmåter

Kilder til vansker/misoppfatninger

- Kjente bokstavsymboler og notasjon – ny betydning

  2a 2½

- Nye bokstaver – ukjente betydninger
  - x representerer et ukjent tall, et generalisert tall, en variabel

- Bokstaver brukt i ukjente operasjoner
  - Fra operasjoner på kjente tall til operasjoner på bokstaver

- Operasjonssymboler – forskjellige meninger

«Early Algebra»

- Tradisjonelt en utfordrende overgang mellom aritmetikk og algebra
- Istedenfor å behandle aritmetikk og algebra som to separate områder: introdusere og legge til rette for algebraisk resonnement i aritmetikk («Early Algebra»).

Carraher og Schliemann (2007, 2016); Kaput (2008)

Et eksempel:
”The candy boxes problem”, 3. klasse

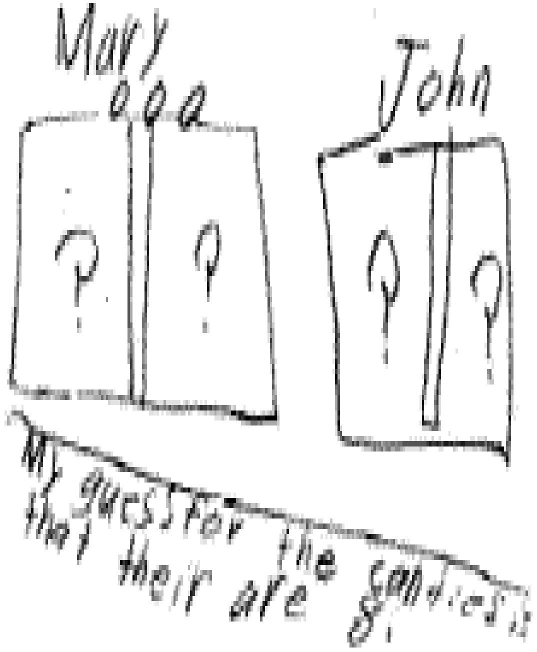
- Boksen i min venstre hånd er Jon sin, og alle hans drops er i den boksen.
- Boksen i min høyre hånd er Marias, og Marias drops består av de i boksen samt de tre dropsene på toppen av boksen.
- Hver boks inneholder nøyaktig det samme antallet drops.

Carraher, Scliemann, & Schwartz (2008)

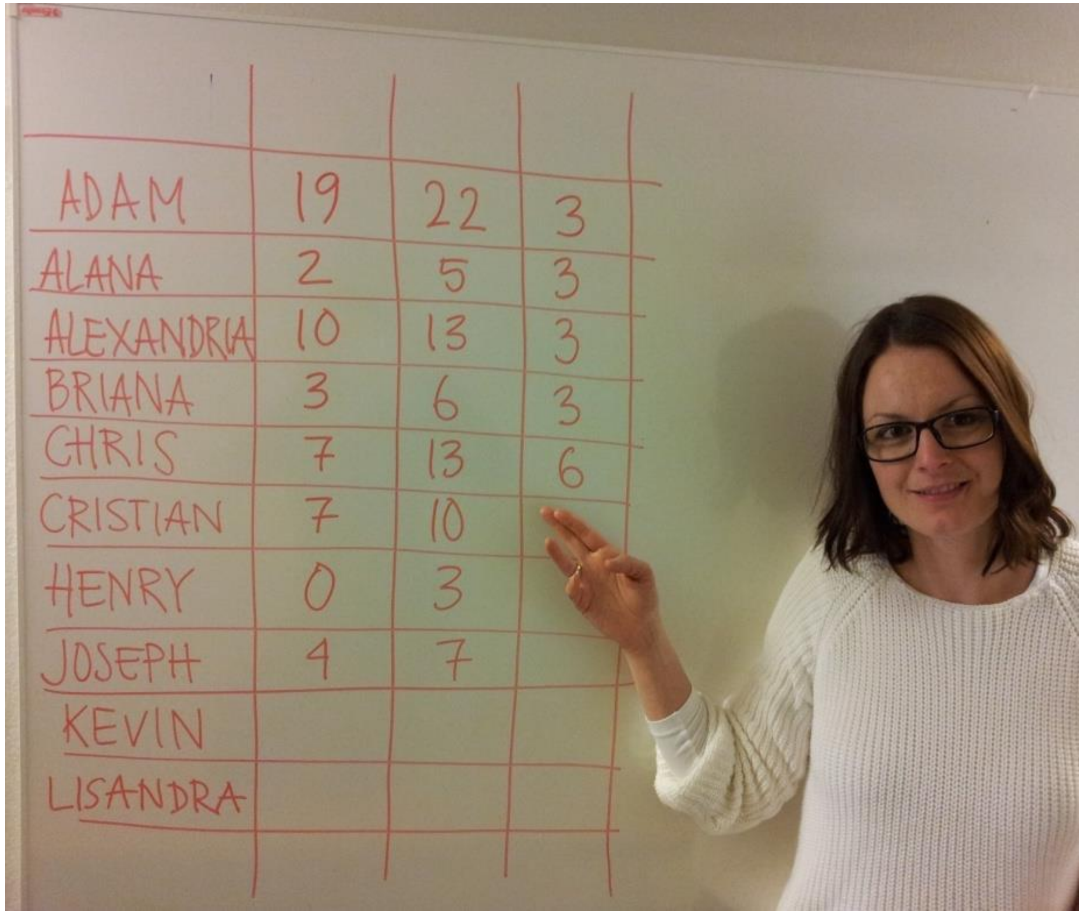
- Diskusjon knyttet til antallet drops som Jon og Maria hver har
- Uttrykk skriftlig antallene drops hver av dem har
- Oppfordret til å vise hvordan de tenker
- 56 av 63 laget tegninger

2/3 foreslo spesifikke verdier for antallene

1/3 lot mulighetene være åpne



- Tabell med mulige utfall
- Lyttet til andre elevers antakelser
- Skiftet fokus til forskjellene i antall drops
- Når en verdi er gitt den ene, så kan ikke lenger den andre variere ”fritt”
- Problemer av en mer generell karakter vokser fram

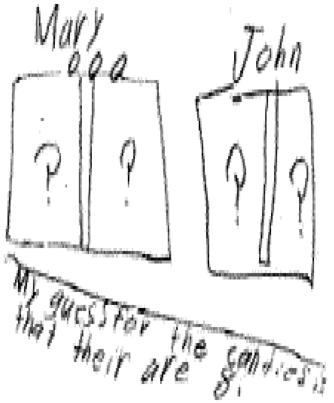


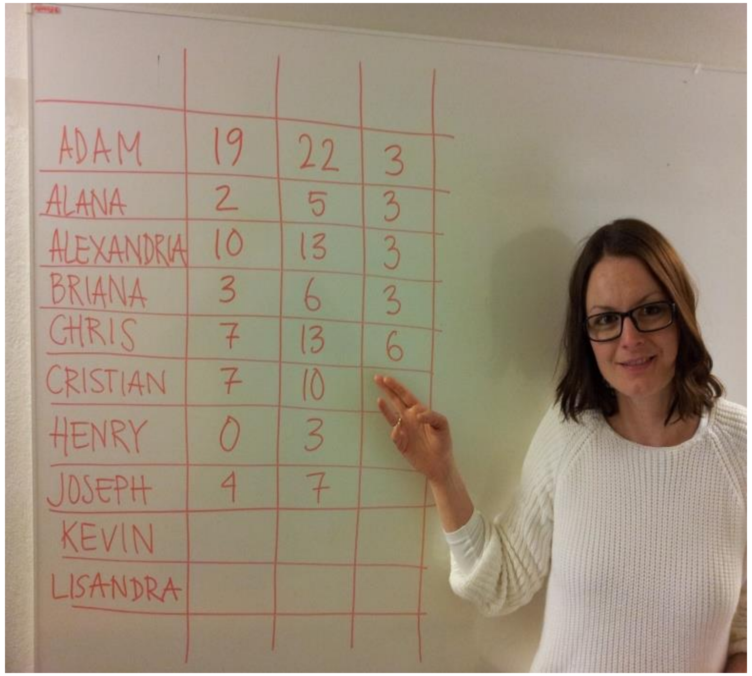
Matematisk innhold

- Variabler
- Funksjonstabeller
  - Synliggjør flere muligheter
  - Spørsmål om logisk konsistens
- Algebraiske representasjoner av variabler

$N+3$

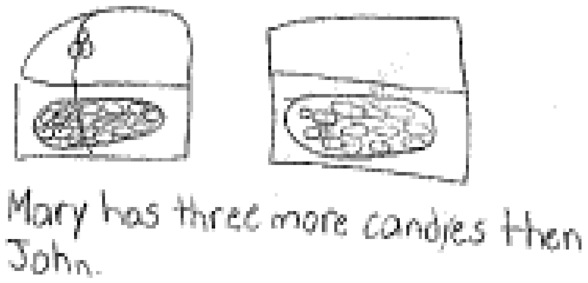
$$F(N)=N+3$$



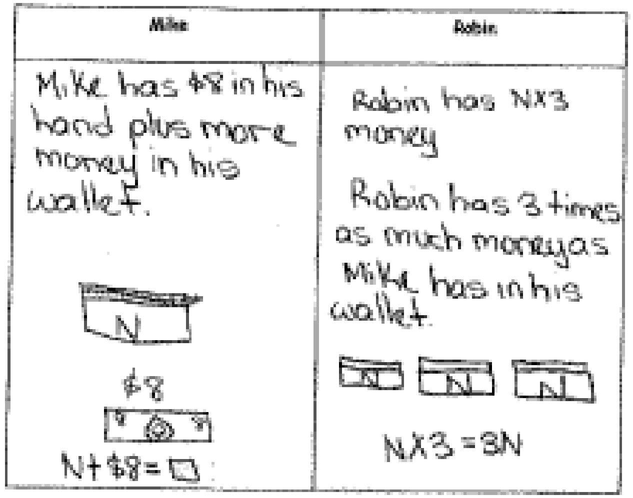


1 ½ år senere…

Mike har $ 8 i hånda og resten av pengene sine i lommeboka; Robin har nøyaktig 3 ganger så mye penger som Mike har i lommeboka si. Hva kan du si om hvor mange penger hver av dem har?

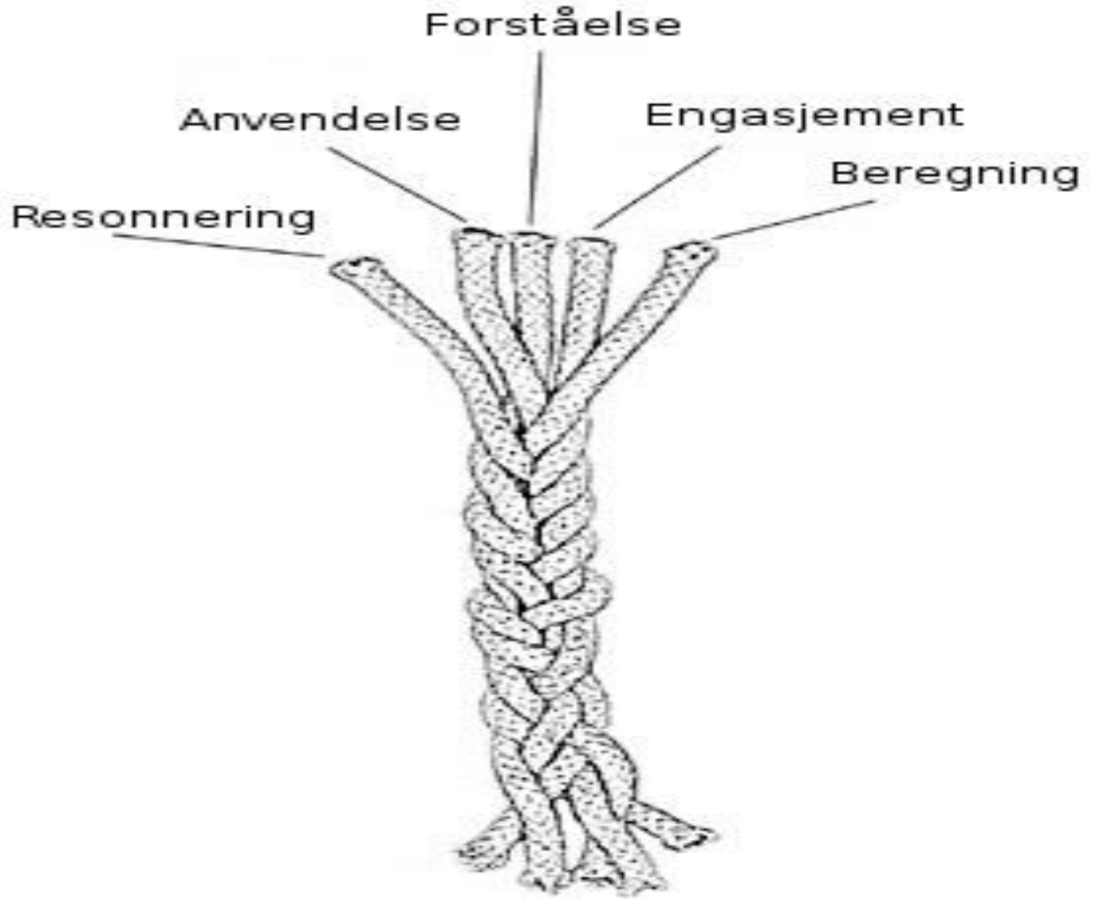


- 2/3: generelle algebraiske representasjoner



Matematisk kompetanse

- Begrepsforståelse
- Prosedyrekunnskap
- Resonnementskompetanse
- Problemløsings – og modelleringskompetanse
- Motivasjon/engasjement til å gå inn i matematiske problemstillinger og bruke forståelsen i beregning, anvendelse og resonnement.
- Kritisk tenking og refleksjon over egen læreprosess



Kilpatrick et al. (2001); NCTM (2000, 2014); Niss & Høigaard-Jensen (2002)

Fig. hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell (2001)

Andre nært knyttede ideer og begreper

- Relasjonell forståelse og instrumentell forståelse (Skemp, 1976)
- Kreativt resonnement og imitativt resonnement (Lithner, 2008)
- Dybdelæring og overflatelæring (Kunnskapsdepartementet, 2017; NOU, 2015)

Dybdelæring innebærer at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere helhetlig og varig forståelse

Diskuter

- Med ønske om å legge til rette for elevenes dybdelæring i algebra:
  – Hvor godt mener dere at undervisningen i dag legger til rette for det?
  – Hvordan kan undervisningen tilrettelegges?

Hvordan undervises det i norske matematikklasserom

- Mye monologisk helklasseundervisning og mye individuelt arbeid.
- Lite fokus på problemløsing og muntlig kommunikasjon
  - Forklare, resonnere, diskutere, begrunne
  - Mellom elever og med lærer som veileder

Gilje et al. (2016); Klette (2013); Olsen (2013)

Undervisning - eksempelet

- Oppdagelser og utforskning
- Kontekstbasert situasjon, konkreter
- Diskusjoner, forklaringer, begrunnelser
- Algebraisk notasjon introdusert gradvis
- Lærers rolle

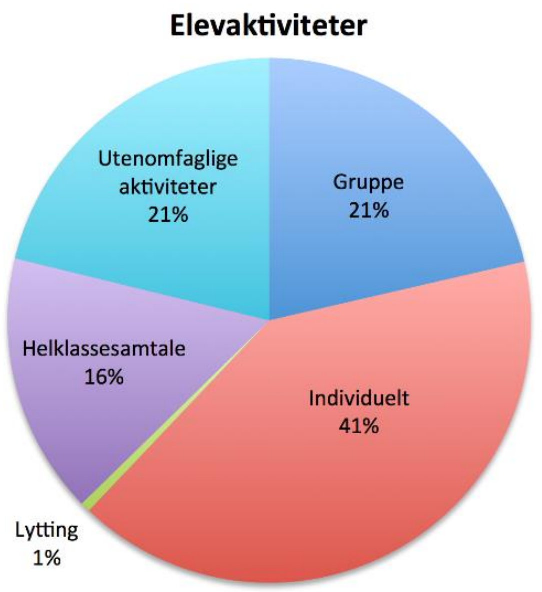
8 undervisningsprinsipper

1. Lage tydelige matematiske mål for å gjøre læreprosessen mer fokusert
2. Integrere oppgaver som legger til rette for resonnering og problemløsing
3. Bruke og se sammenhenger mellom ulike representasjoner
4. Legge til rette for en meningsfull matematisk diskurs
5. Stille målrettede spørsmål
6. Bygge prosedyreferdigheter basert på begrepsforståelse
7. Gi elevene produktiv motstand og mulighet til å strekke seg i læreprosessen
8. Diagnostisere og bruke elevenes tenkning

NCTM (2014)

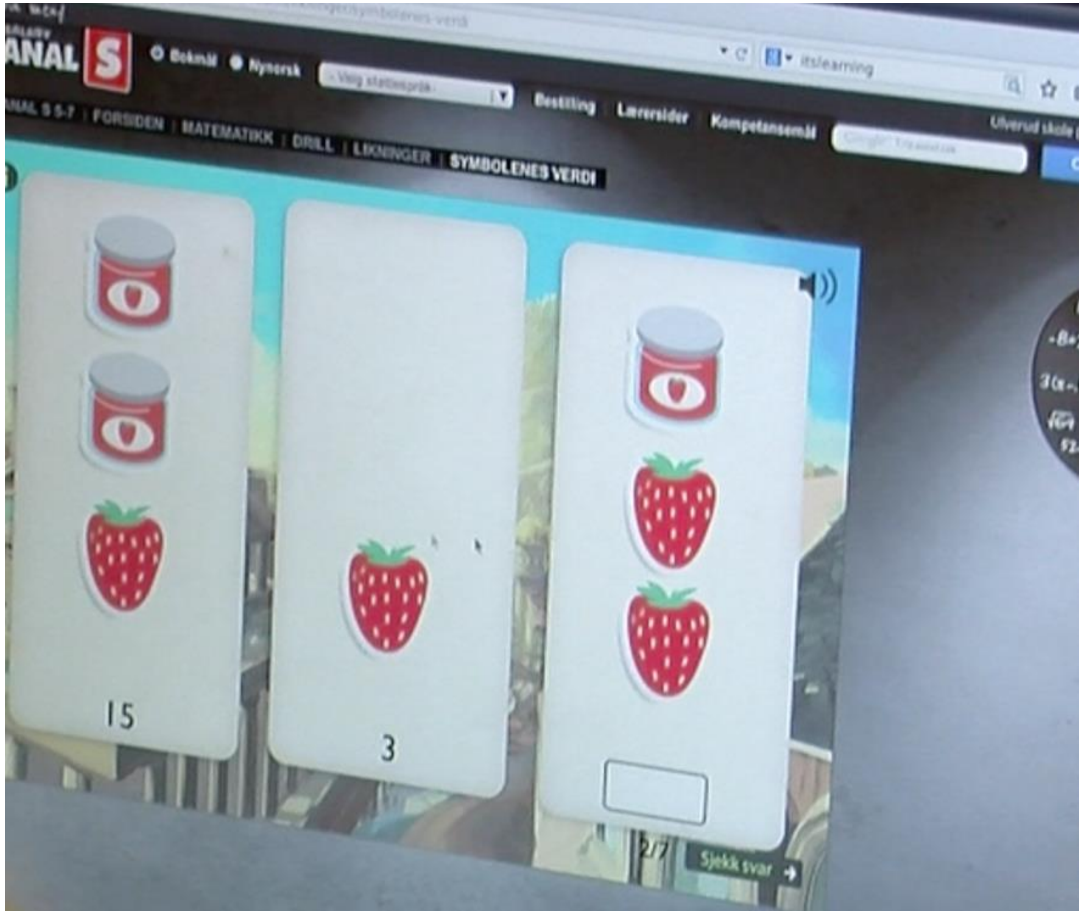
Tilbake til 5.klasse-case

- Undervisningen
  - Helklassesamtaler - visuelle representasjoner på interaktiv tavle
  - Løse oppgaver i lærebok
  - Spill og visuelle representasjoner på PC (1/5 av undervisningstiden)
    - Jobbet sammen i par



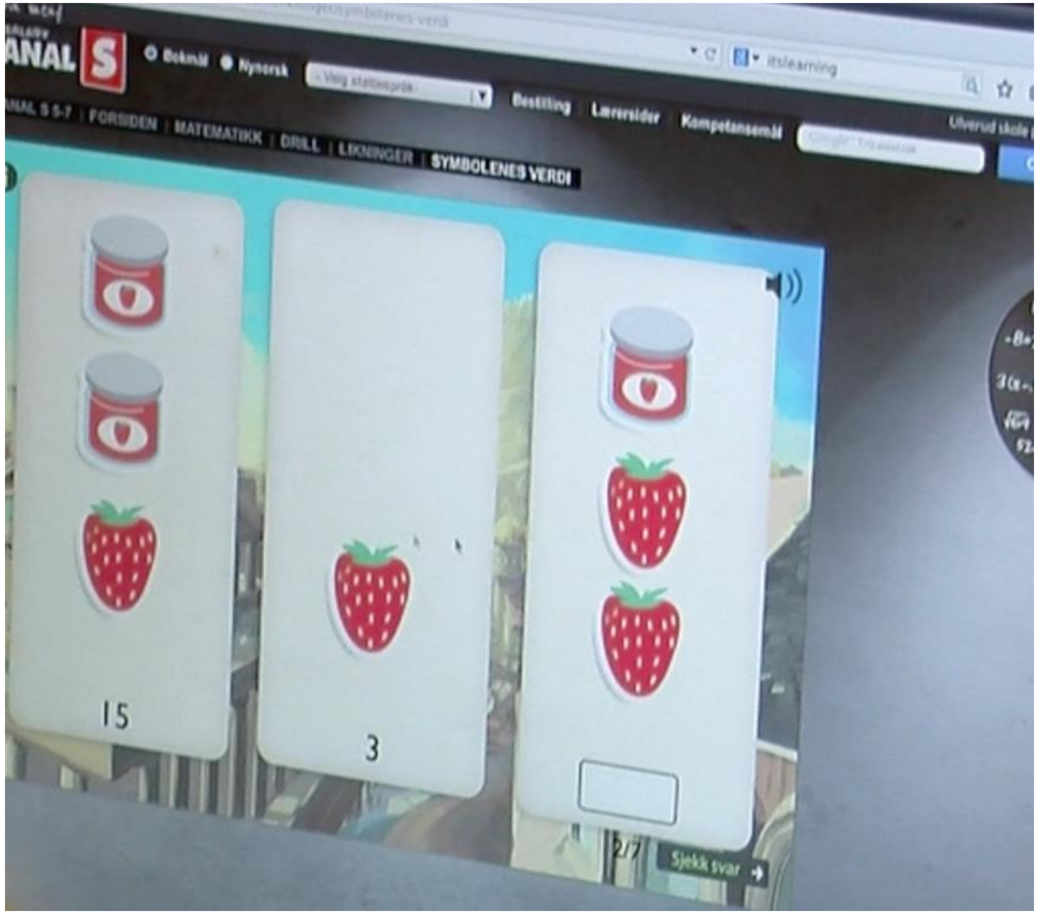
«Symbolenes verden» fra Salaby, Gyldendal

- Visuelle representasjoner av velkjente objekter som representerer «ukjente»
- Elementer i en algebraisk struktur som representerer likningssystemer; 3 likninger og 2 ukjente
- Elevene jobbet sammen i par
- Målet var å finne ut verdien av siste kolonne og de kunne ikke gå videre før de hadde løst de enkelt oppgavene



Episode 1

- Heidi: Skal vi se, uhm.
- Jan: Du ser at de her er 15 (peker på likninga til venstre med de to glassene og jordbæret) og den er 3 (peker på jordbæret som står alene i likningen i midten). Så det var tre (peker på jordbæret i likning til venstre)
- Heidi: Da er de der (fører musepekeren over glassene, de må være
- Jan: Da må det være 6 (holder pekefingeren på det øverste glasset). Fordi 6 + 6 (peker på glasset nedenfor) er 12 + 3 (peker på jordbæret) er 15
- Heidi: Mmm [bekreftende]. Så da er (holder musepeker på glasset i likningen med ukjent svar) 6 + 3 + 3 (lar musepekeren gå ned på de to jordbærene)
- Jan: Det er 12



Episode 2

- John: Hvis det er 14 (*peker samtidig på flyet og båten i likning 2 med 2 finger)*, så kanskje de må være *[kort pause]* vent litt *(peker på de to figurene en gang til med to fingre)* 14 + 14, 28 (peker på figurine I likning 1 mens han sier *28*). [Kort pause]. Nei, de kan ikke være 7… 4 på flyet kanskje?
- Lisa: Og 10 på båtene?

«Bike racing math algebra game» fra mathnook.com

- Tidsbasert spill
- Kappkjøring mellom 4 motorsykler, man styrer farten til den ene
- Likninger kommer opp på skjermen, 4 svaralternativer
- Riktig svar – motorsykkelen går raskere, feil svar saktere
- Om og gjøre å komme på en «high score»-liste

Episode 3

Etter flere forsøk på å spørre guttene om hva som er meningen med spillet (bl.a. «skal vi legge sammen de to tallene der, ‘3’ og ‘y’ da likningen 3y+6=15 kom på skjermen), sier Anna:

- Anna: …men jeg forstår ikke.
- Christian: på «hard» så må du ta mindre enn… du må alltid velge [et tall] mindre enn 9… og mer enn 1
- Sandra: Men, gjetter vi bare da?
- Christian: Ah, du, men det får du bestemme
- Anna: Men… Hva er meningen?

En ny likninger kommer opp, 3y+6=18, og Christian sa: «Her må du legge sammen. 3y+6=8». Likningen forsvant og en ny kom på skjermen. «Da tar du… hva er 6+3?»

- Anna: 6+3? Det er 9.
- Christian: 9? Riktig. Da legger du til 9 og det blir 18.

Diskuter

- Hvordan bidrar læremidlene til læring av algebra?
- Hvordan kan lærer støtte en læreprosess?

Symbolenes verden

- Velkjente, visuelle representasjoner for variabler
- Mulighet til å resonnere, argumentere, diskutere med basis i disse representasjonene og den indre sammenhengen innad i kolonnene og mellom kolonnene.
- Plausibel argumentasjon forankret i matematikken
- Potensiale for å legge til rette for dybdelæring – men
- Feedback fra læremiddelet viktig
- Lærers rolle som veileder viktig!

Motorsykkelspillet

- Vanskelig å se hva elevene kan lære av dette (og tilsvarende) spill
- Tilfeldig klikking på svaralternativ – for mange den mest «effektive» strategien
- Viktigere med strategier knyttet til spillfunksjon enn matematikken
- Fant opp egne regler irrelevant for matematikken («større enn 1, mindre enn 9»)
- Misoppfatninger ble stående ukorrigert (ay=a+y)
- Høyt engasjement

Digitale læremidler

- Grunnleggende ferdighet, viktig i Læreplan og styringsdokumenter
- Lite brukt i matematikk sammenliknet med andre fag
- Matematikk: papirbasert læremiddelfag med mindre innslag av digitale læremidler og ressurser for læring sammenliknet med andre fag (naturfag, engelsk, samfunnsfag).
- Lærere, særlig i grunnskolen, velger i hovedsak papirbaserte læremidler (lærebok), og supplerer med digitale læremidler og ressurser for læring
- Lærere i grunnskolen oppfatter i større grad enn lærere i vgs læreboka som det sentrale læremiddelet i sin undervisning
- Læreren oppfatter at den papirbaserte læreboka har en struktur som sikrer progresjon i arbeidet med faget.

Gilje et al. (2016)

Teknologi: didaktiske funksjoner

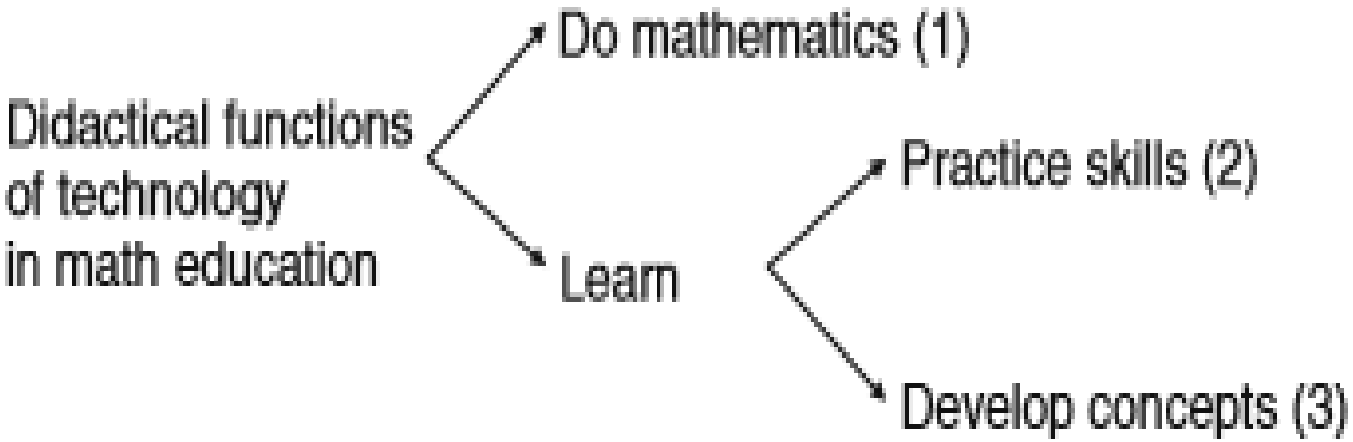


Fig. 1 Didactical functions of technology in mathematics education

Drijvers (2015)

Referanser

- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2016). Poweful Ideas in Elementary School Mathematics. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3. ed.). New York: Routledge, Taylor & Francis group.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J.J. Kaput, D.W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades.* New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). In S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135-151). Cham: Springer International Publishing.
- Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., . . . Skarpaas, K. (2016). Med ARK&APP. Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer. *Sluttrapport. Oslo. UiO*.
- Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I Kaput, J., Carraher, D. and Blanton, M. (Eds.) Algebra In The Early Grades. New York, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 5-18.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. *Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Washington, DC: National Academy Press*.
- Klette, K. (2013). *Hva vet vi om god undervisning? Rapport fra klasseromsforskningen.* Bergen, Norge: Fagbokforlaget

Referanser

- .Kunnskapsdepartementet (2017: *Overordnet del – verdier og prinsipper.* https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/horing-om-forslag-til-ny-generell-del-av-lareplanverket-for-grunnopplaringen-som-skal-erstatte-gjeldende-generell-del-og-prinsipper-for-opplaringen/id2542076/
- Kieran (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. J. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 707-762. Charlotte, NC: Information Age.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.
- NCTM (2008). *Algebra, What, When, and for Whom. A position of the National Council of Teachers of Mathematics*.
- NCTM (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. In N. C. o. T. o. Mathematics (Ed.): Author Reston, VA.
- Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18): Undervisningsministeriet.
- NOU 2015:8: *Fremtidens skole: fornyelse av fag og kompetanser*.
- Olsen, R. V. (2013). Undervisning i matematikk. I M. Kjærnsli and R. V. Olsen (Eds.). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo, Universitetsforlaget
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.