



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Oppgaver som involverer og utfordrer *alle* elevene kognitivt.

Hvordan kan vi gjøre oppgaver og problemer utforskende?

Novemberkonferansen 28.november 2017

Svein Anders Heggem



Jeg inviterer dere inn i mitt klasserom: Hvordan sikrer vi at alle elevene har et rimelig læringsutbytte av matematikkundervisningen?



Nødvendige rammer for matematikkundervisningen?

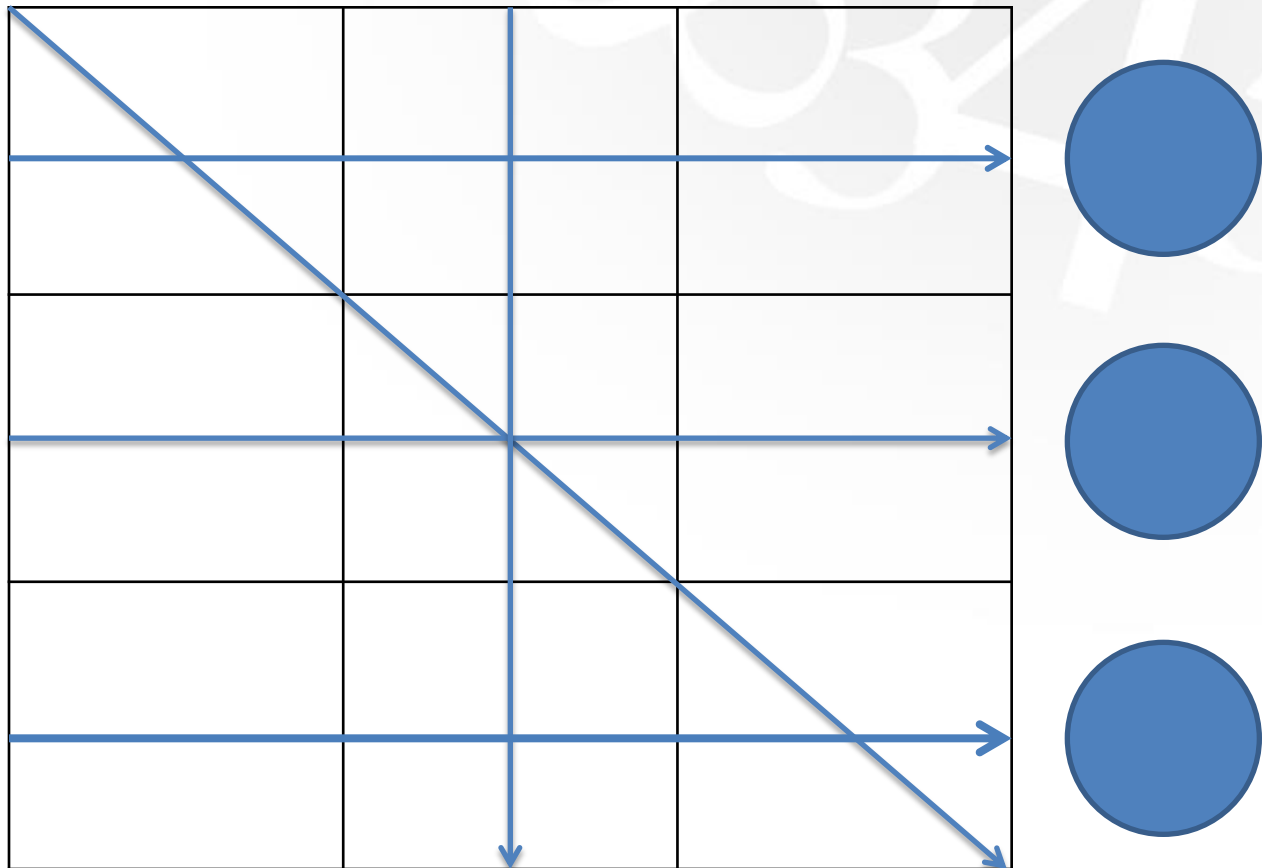
- Se eleven og gi støtte!
- Læringsvenner trekkes hver fjortende dag eller hver tredje uke.
- Tid til å tenke , diskutere med læringsvennen og jobbe med problemfelt og oppgaver. Plenumssamtale / oppsummering.
- Det skal være trygghet for å prøve en tankegang eller strategi. «Feilsvar» er verdifulle og brukes pedagogisk.
- Ingen håndsopprekking: Alle blir utfordret over en periode på en til to timer.
- Lytte og respondere med respekt og høflighet til medelever. Ingen parallellkommunikasjon, verbalt eller non-verbalt!
- Når det blinkes med lyset samles oppmerksomheten til plenumsamtale.

Tidspress-, prestasjonspress og matematikk læring



Bruk 2-5 minutter individuelt, snakk så med læringsvennen:
MAGISKE KVADRAT

- Sett inn hvert av de naturlige tall fra 1 til 9 slik at summen blir den samme horisontalt, vertikalt og diagonalt: «Den magiske summen».



Må alle elever ha kommet i mål for å ha utbytte av å delta i læringssamtalen?

Skal noen forberedes til å bidra (fordel læringsvennsamarbeid?)

Kan noen jobbe med å utvide?

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Samtaletrekk	Det kan høres ut som...	Hva en lærer gjør
1. Gjenta	«Så du sier at...?»	Gjentar deler av eller alt en elev sier, og ber deretter eleven respondere og bekrefte om det er korrekt eller ikke.
2. Repetere	«Kan du repetere hva han sa med dine egne ord?»	Spør en elev om å repetere en annen elevs resonnering.
3. Resonnere	«Er du enig eller uenig, og hvorfor?» «Hvorfor gir det mening?»	Spør elevene om å bruke deres egen resonnering på andres resonnement.
4. Tilføye	«Har noen noe de vil føye til?»	Prøver å få elevene til å delta i en videre diskusjon.
5. Vente	«Ta den tiden du trenger... vi venter.»	Venter uten å si noe.
6. Snu og snakk	«Snu og snakk med sidemannen din.»	Går rundt og lytter til samtalene og vurderer hvem som skal spørres.
7. Endre	«Har noen endret tenkingen sin?»	Tillater elevene å endre tenkingen etter som de får ny innsikt.

Hva slags undervisningsform for at alle elevene skal utvikle sin regne- og matematikkompetanse?

- «**Imitasjonslæring**» (Prosedyre / algoritmisk tilnærming / instrumentell forståelse)
- ...eller mer **kreative undervisningsformer** (utforskende og resonnerende tilnærming / begrepsmessig og relasjonell kunnskap)?



Undersøkende / utforskende matematikkundervisning (inquiry based teaching):

Oppstart: Lærer presenterer en ny og kognitivt krevende oppgave.

Undersøkende fase: Elevene får god tid til å jobbe med oppgaven eller aktiviteten, finne nye løsninger, beskrive hvordan de tenker etc.

Oppsummering: Klassen diskuterer oppgaven og forskjellige løsningsmetoder. Elevene utvikler forståelse for prosedyrene og må kunne bruke disse.



«Vi har ikke tid...!»

Læring og undervisning i matematikk: Instrumentell eller relasjonell forståelse...?

- **Forståelse:**

Instrumentell forståelse innebærer å lære regler og formler som hjelp for å finne løsninger på ulike oppgaver. Prosedyrekunnskap.

Relasjonell forståelse: Bygge opp begrepsmessige strukturer, se sammenhenger mellom begreper, vite hvordan man løser en oppgave og hvorfor det blir slik. Begrepsmessig kunnskap.

Et bilde (Richard Skemp): Veibeskrivelse...!

Instrumentell forståelse ,en rekke bestemte instruksjoner fra et startpunkt til et bestemmelsessted.

Relasjonell forståelse, et mentalt kart over området...



Ulike studier og forskning og tyder på at.....

- ..kognitivt krevende matematikkoppgaver fremmer større begrepsmessig forståelse hos elevene
- ...elevene må streve litt / gjøre en innsats for å forstå matematikken og ikke bare bli presentert for informasjon (algoritmer, prosedyrer etc.)
-algebra er det området hvor elevene oftest møter algoritmer og huskereglene for å løse problemer: Dermed forblir forståelsen av algebra på et instrumentelt nivå.
- «I dag skal dere lære å multiplisere inn i parenteser.....»

Regneregler i algebra del 4

$$\begin{aligned} & 6(x-1)(3x+2)^2 \\ &= 6(x-1)(3x+2)(3x+2) \\ &= 6(x-1)(9x^2+6x+6x+4) \\ &= 6(x-1)(9x^2+12x+4) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$(a+b)(c+d)$
 $ac+ad+bc+bd$

Jo Boaler, Stanford University: Utvikle tallforståelse

- Resonnement er matematikkens kjerne.
- Dess mer memorering som vektlegges, dess mindre villige blir elevene til å tenke på tall og relasjoner mellom dem, noe som ville virket til å utvikle tallforståelsen.
- Det er en vanlig og ødeleggende misforståelse at sterke matematikk-elever er synonymt med raske matematikk-elever.
- Fart og testdrevet klasseromspraksis fører til at mange elever som er langsomme og dype tenkere, ikke tror de kan være flinke i matematikk.

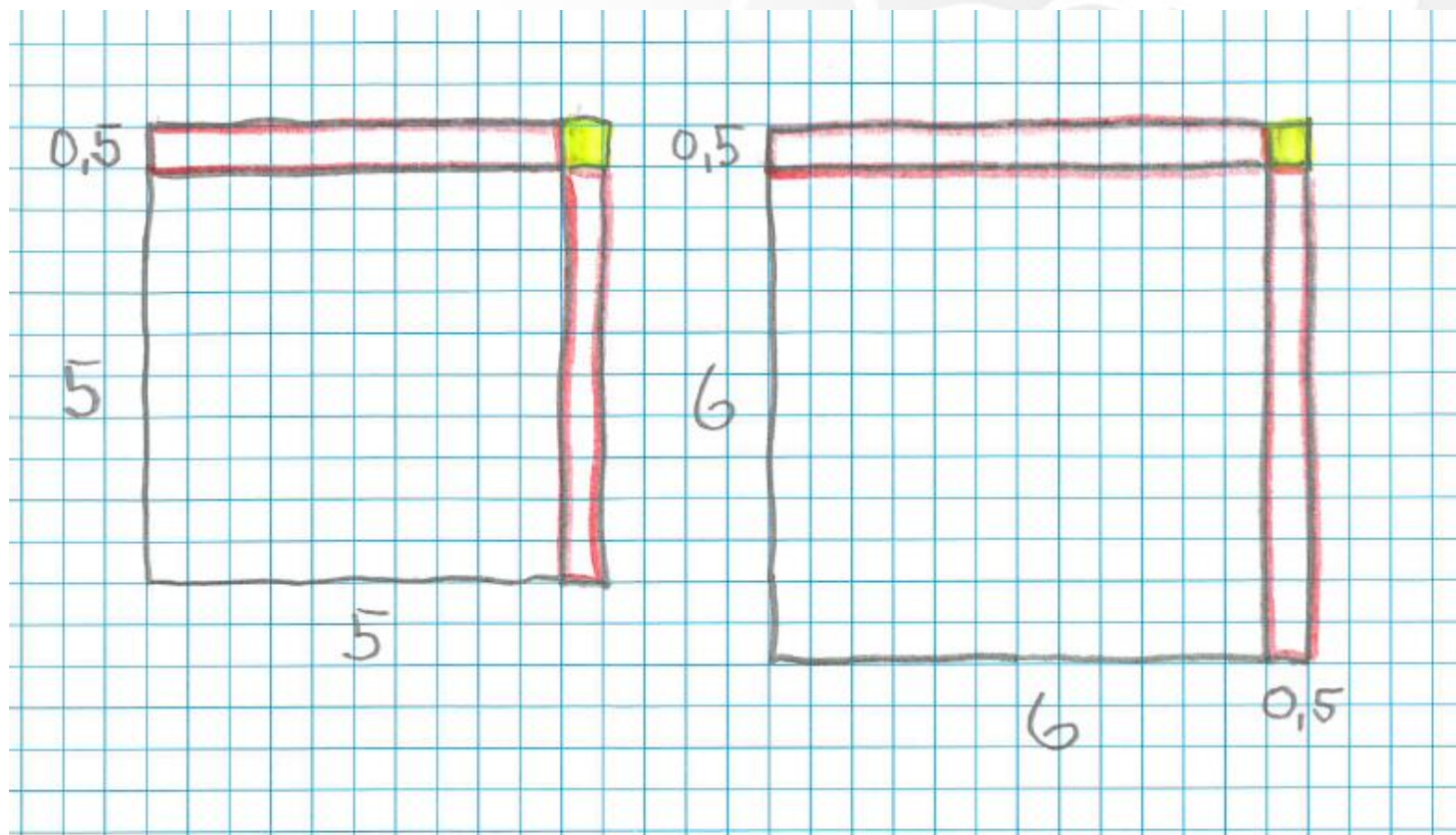


Se på kvadrattallene.

Se så på oppgavene til høyre: Let etter mønster og sammenhenger (kalkulator?)

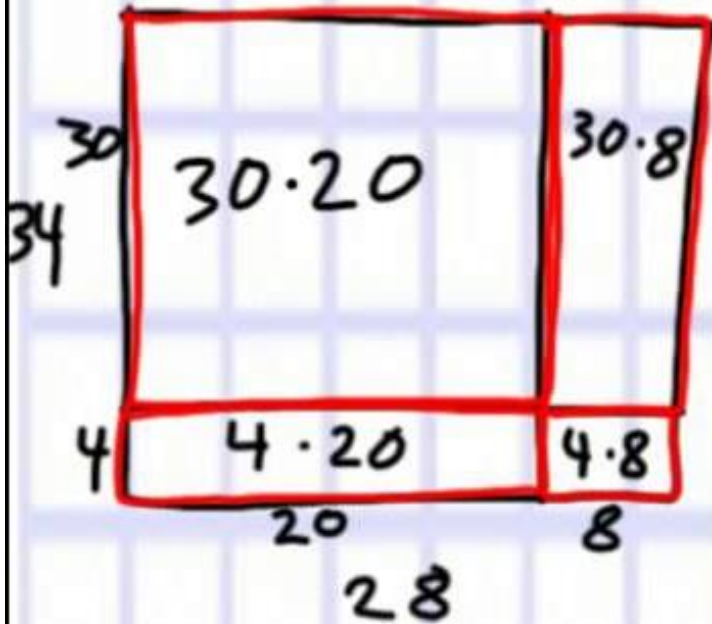
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$
- $10 \times 10 = 100$
- $3,5 \times 3,5 =$
- $4,5 \times 4,5 =$
- $5,5 \times 5,5 =$
- $6,5 \times 6,5 =$
- $7,5 \times 7,5 =$
- Hva tror du $20,5 \times 20,5$ blir? Sjekk svaret!
Hvordan tenkte du?

«Æ' ser jo at de to røde alltid blir en hel til i tillegg, så derfor ...»



også når de skal multiplisere...

$$34 \cdot 28$$



$$30 \cdot 20$$

$$30 \cdot 8$$

$$4 \cdot 20$$

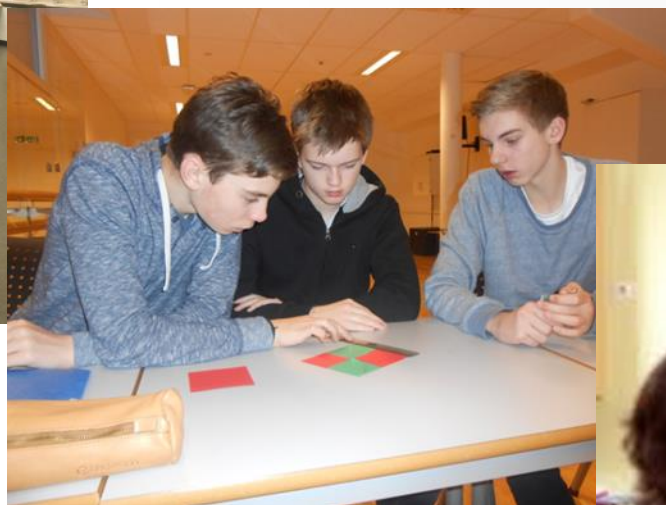
$$4 \cdot$$

Elevens motivasjon

- Motivasjon har en avgjørende betydning for om elevene lykkes eller ikke.
- Lærerenes undervisningspraksis har stor betydning for elevens motivasjon (klasseromsinteraksjoner, aktiviteter, erfaringer og kultur)
- **Ytre motivasjon:** Mer overfladisk kognitiv forpliktelse, kopiere, repetere og huske utenat. Ofte mer frykt for å gjøre feil
- **Indre motivasjon:** Mer utholdende, har større selvtillit, er mer kreative og benytter mer problemløsende metoder.
- To typer målorientering:
- **Prestasjonsorientering:** opptatt av seg selv i lærings situasjonen og målet er å bli oppfattet som flinkere enn andre / rangeres høyere enn andre / prestere bedre enn andre
- og **læringsorientering:** utvikle forståelse og ferdigheter og få innsikt

Snakk sammen med læringsvennen:

- ❑ Hvilke aspekt ved klasseromskulturen påvirker elevens motivasjon positivt?
- ❑ Hva slags matematikkundervisning ønsker du å få til på egen skole?



Seks aspekt ved klasseromskulturen som påvirker elevens motivasjon i matematikk på en positiv måte i form av økt indre motivasjon og læringsorientering (Nosrati og Wæge)

- **Oppgaver og aktiviteter** som problemløsningsoppgaver, praktiske oppgaver, oppgaver fra dagliglivet og åpne oppgaver
- **Samarbeid**
- Elevene blir oppmuntret til å **utvikle egne løsningsstrategier** (autonomi)
- Et **positivt affektivt klasseromsmiljø** (læreren behandler eleven med respekt, lytter til idéene deres og verdsetter deres faglige bidrag)
- Fokus på læringsprosessen og **utvikling av forståelse** i matematikk
- Læreren gir konkrete og konstruktive **tilbakemeldinger**, utfordrer elevene og bruker feil og misoppfatninger som en del av læringsprosessen

En betydningsfull erfaringer for meg fra mitt lærerliv:
«Kjersti» hadde fått beskjed om å øve på brøkkregning



$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}$$

□ «Kjersti»

var samvittighetsfull, pliktoppfyllende, arbeidsom med gode kognitive evner:

God konsentrasjon og oppmerksomhet, god lytter og oppfattet argument og tok ulike perspektiv, trengte god tid til å tenke, tolke og gjøre valg, husket godt, god i problemløsning, omforme og løse et problem, vurderte løsningene, trakk konklusjoner, tok avgjørelser, resonnerte, hadde godt språk og var god til å kommunisere.



...men hun kunne ikke brøk, så «Kjersti» fikk beskjed om å øve mye på brøkgregning.....!

- **Etter 4-5 uker på ungdomsskolen: Prøve i tall, tallforståelse og tallregning. Hun presterte lavt....**
- **Mor: «Men mi har øvd nesten ein time hver dag i heile sommer....»**
- **Diagnostisk prøve.....**



Diagnostisk oppgave.....

- ...basert på forskning for å fremprovosere uferdige begreper og misoppfatninger
- NB! Må brukes med omsorg i et trygt læringsmiljø!!!!
- Tilbake til «Kjersti»: Hvilket tall er størst ?

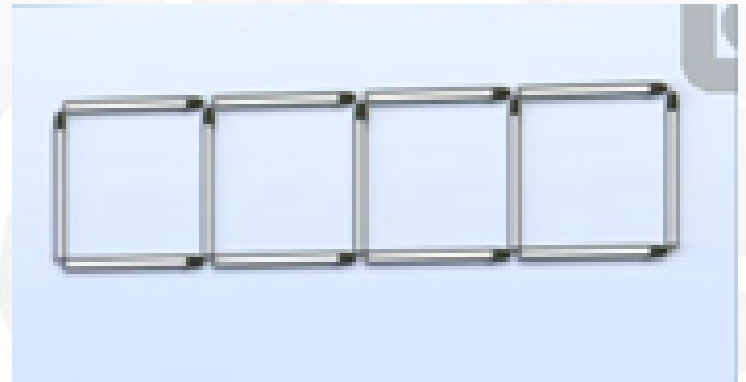
0,125

0,4

0,62

- Målrettet tiltak: Gikk ut ungdomsskolen med «Meget»

AR-gruppa: Tradisjonelle
lærebokoppgaver



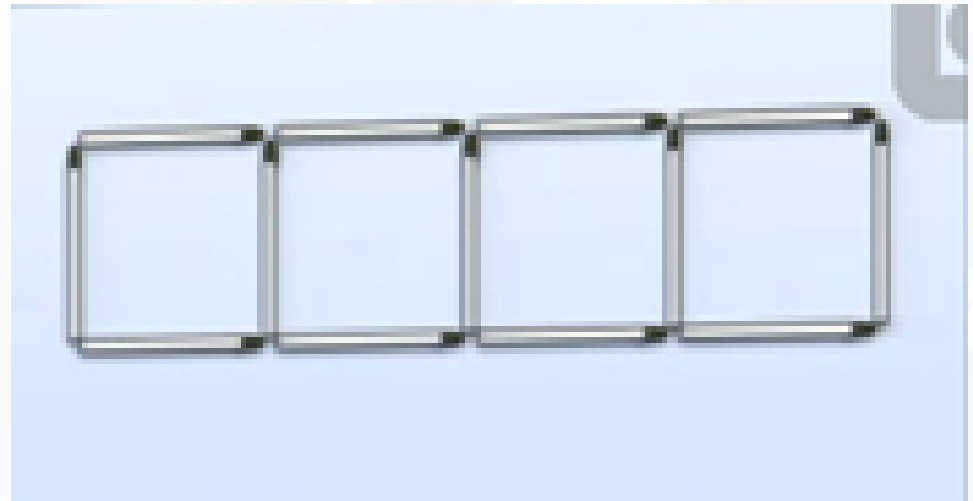
- Når kvadrater settes sammen til en rekke som vist over, trenger man 13 fyrstikker for å lage 4 kvadrater.

Hvis x er antall kvadrater, kan man regne ut antall fyrstikker ved formelen $y = 3x + 1$

Eksempel: Hvis du skal lage ei rekke med 4 kvadrater, trenger du $y = 3 * 4 + 1 = 13$ fyrstikker

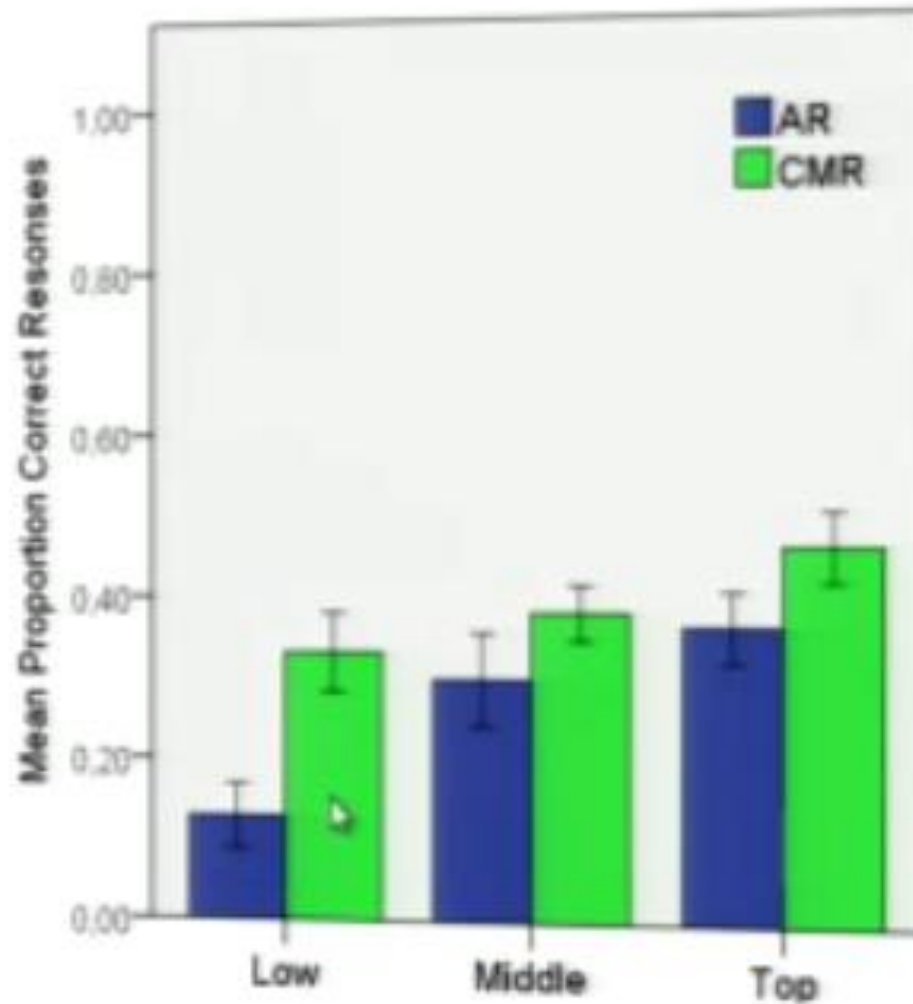
Hvor mange fyrstikker trenger man for å lage ei rekke med 6 kvadrater? Hva med 9 kvadrater?

CMR-gruppa:
Mindre informasjon, mer utforsking,
«inquiry»:



- Når kvadrater settes sammen til en rekke som vist over, trenger man 13 fyrstikker for å lage 4 kvadrater.
- Hvor mange fyrstikker trenger man for å lage ei rekke med 6 kvadrater?

«Kreative og mer åpne oppgaver passer bare for de flinkeste elevene, ikke for de svakeste....! De må få en oppskrift!»

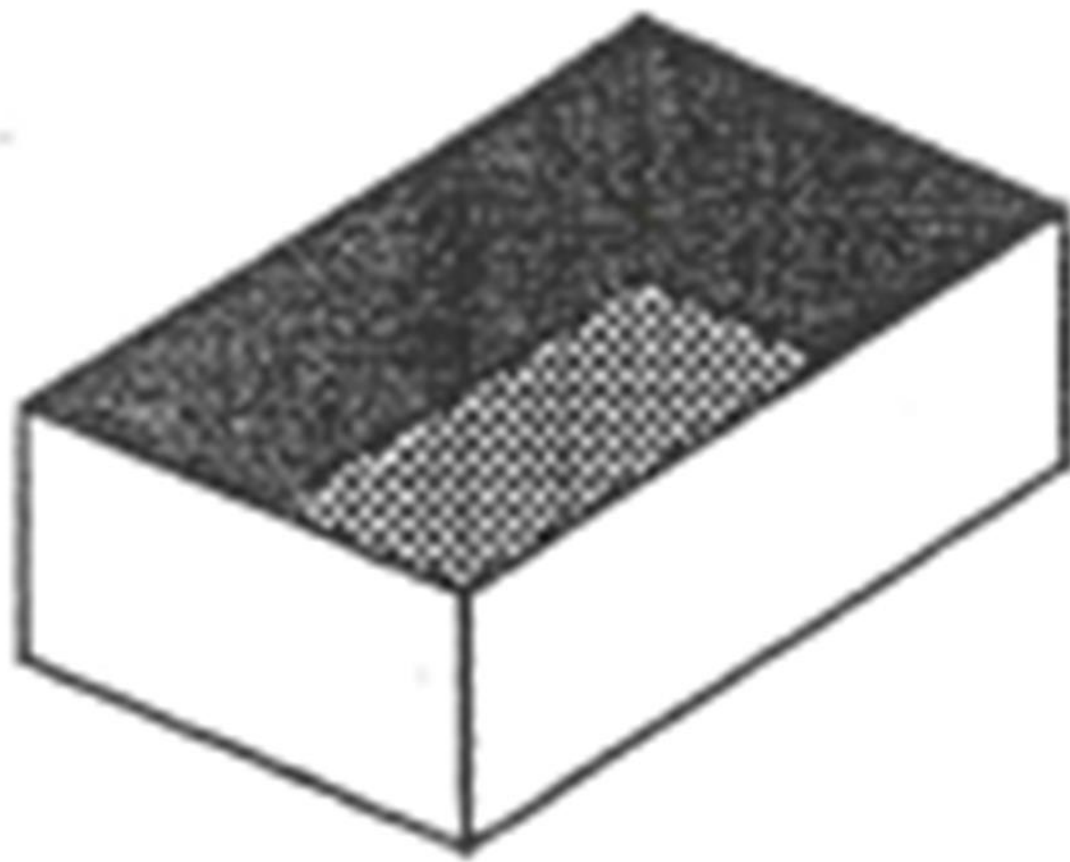


Johan Lithner, Umeå universitet:

- ❑ Elever som kun har lært en oppskrift er fortapt når de ikke husker dem riktig. Elever som har lært å resonnerer matematisk, tenker og gjenskaper regnestrategier når de er i tvil. De regner bedre!
- ❑ Elever med svake kognitive evner (medisinsk-nevrologiske årsaker) trenger å tilnærme seg matematikk på andre måter enn å huske, pugge eller øve.

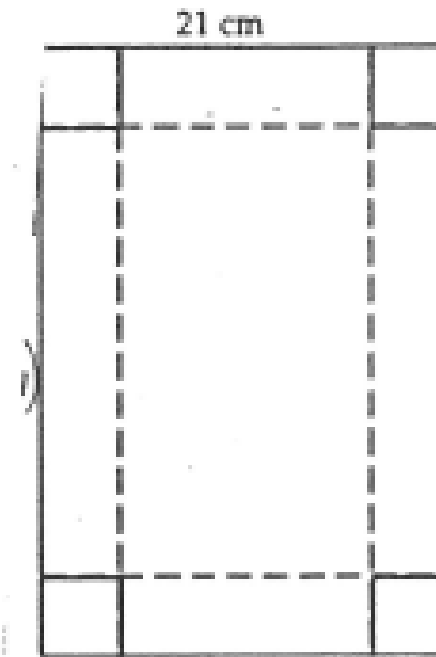


Brette eske uten lokk av et A4-ark.
(Et A4-ark er 30cm x 21cm)



Eske uten lokk

- Lag ei eske (uten lokk) av et A4-ark. Et A4-ark er 30x21 cm
- Beregn volumet
- Kan du lage eska slik at den blir nøyaktig en liter?
- Hvordan vil du brette/klippe for å få maksimalt volum?



IKT-tilgang i våre klasserom i dag...

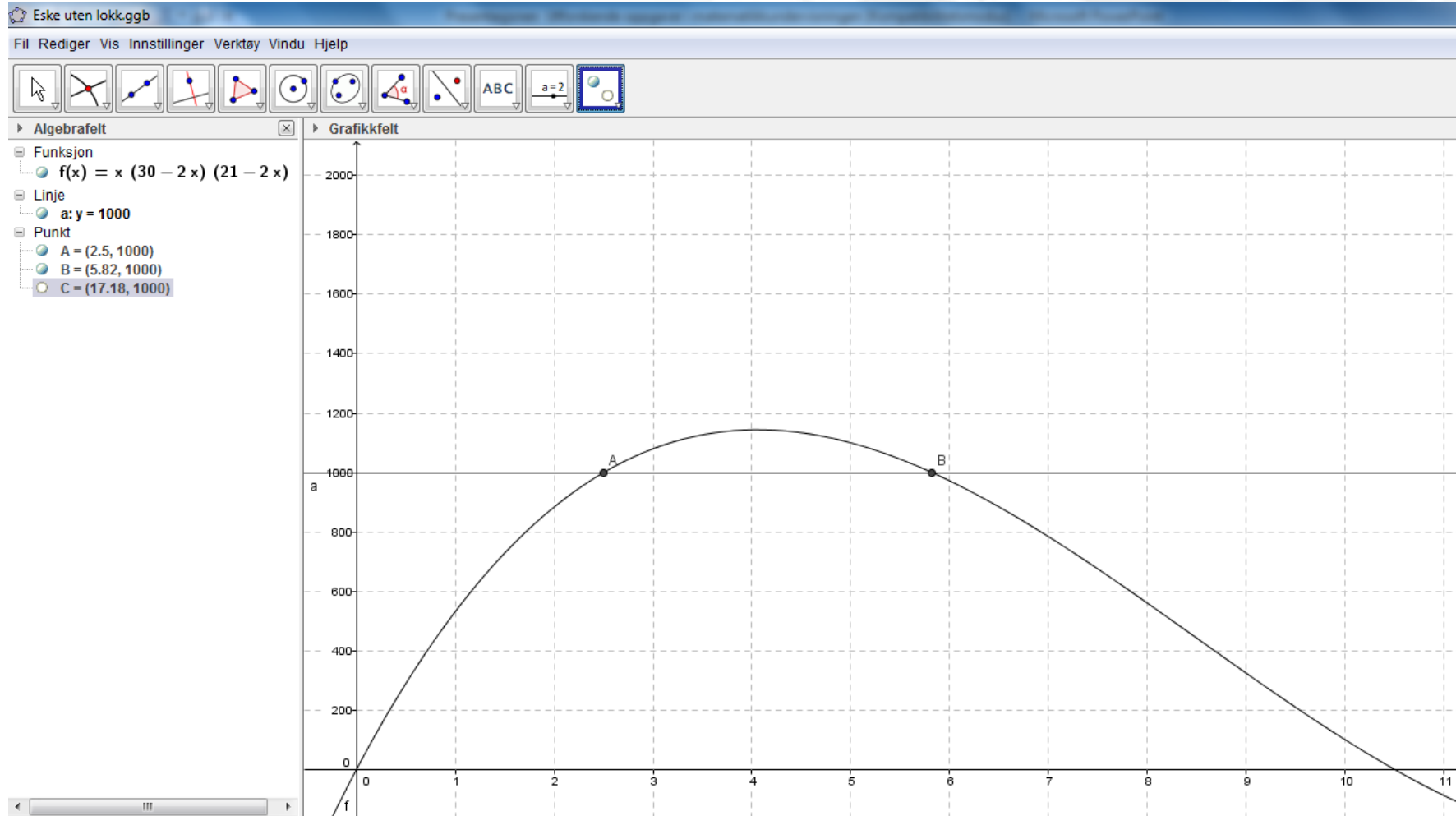
- Behov for et regneark:

A	B	C	D	E	F
ESKE AV ET A4-ark					
Høyde	Lengde Bredde			Volum	
1	28	19		532 cm ³	
1,5	27	18		729 cm ³	
2	26	17		884 cm ³	
2,5	25	16		1000 cm ³	
3	24	15		1080 cm ³	
3,5	23	14		1127 cm ³	
4	22	13		1144 cm ³	
4,5	21	12		1134 cm ³	
5	20	11		1100 cm ³	
5,5	19	10		1045 cm ³	
6	18	9		972 cm ³	
6,5	17	8		884 cm ³	
7	16	7		784 cm ³	
7,5	15	6		675 cm ³	

Finsikte litt....

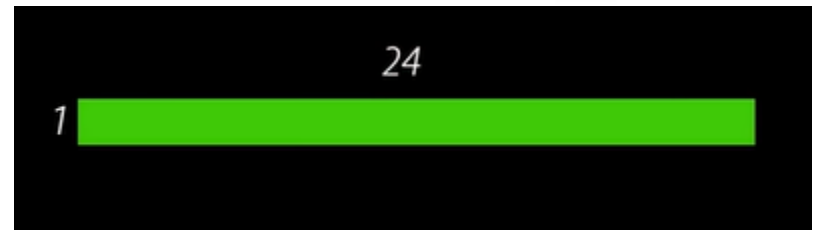
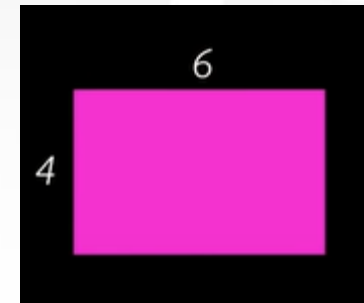
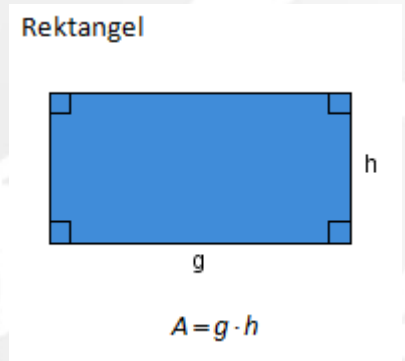
A	B	C	D	E	F
ESKE AV ET A4-ark					
Høyde	Lengde Bredde			Volum	
5,8	18,4	9,4		1003,17 cm ³	
5,81	18,38	9,38		1001,67 cm ³	
5,82	18,36	9,36		1000,16 cm ³	
5,83	18,34	9,34		998,653 cm ³	
5,84	18,32	9,32		997,136 cm ³	
5,85	18,3	9,3		995,612 cm ³	
5,86	18,28	9,28		994,081 cm ³	
5,87	18,26	9,26		992,544 cm ³	
5,88	18,24	9,24		991,001 cm ³	
5,89	18,22	9,22		989,452 cm ³	
5,9	18,2	9,2		987,896 cm ³	
5,91	18,18	9,18		986,334 cm ³	
5,92	18,16	9,16		984,766 cm ³	
5,93	18,14	9,14		983,192 cm ³	

«Kan vi bruke GeoGebra...?»

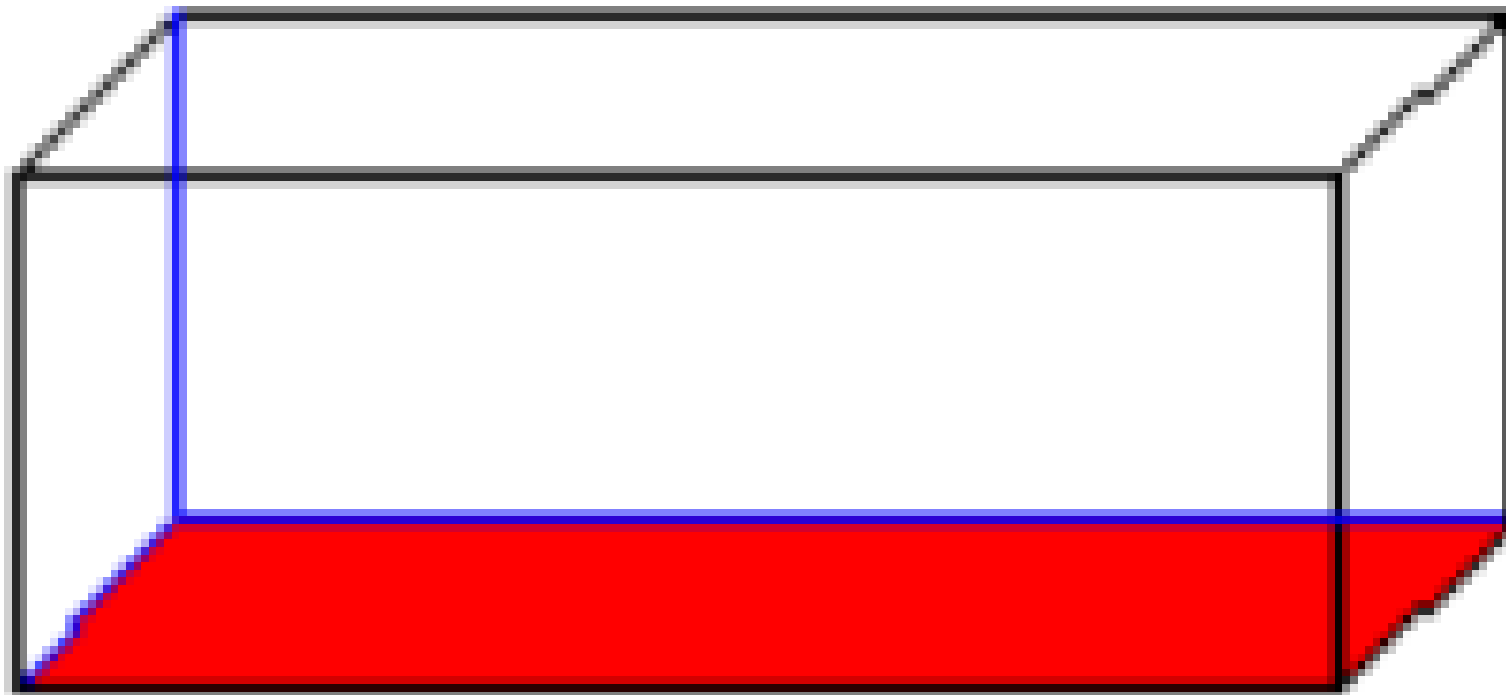


Et rektangel har et areal på 24 cm^2

- Hva slags mål kan det være?



Et rettvinklet prisme har et volum på 600 dm^3
Hva slags mål kan det være?



Elevens oppfatning av egne muligheter kan være preget av vårt læringssyn.

- ❑ Tenker vi at eleven har en statisk intelligens? Enten får man det til, eller så får man det ikke til...
- ❑ «Man kan ikke forvente mer av Kari»
- ❑ Konsekvens: Eleven forventer ikke å mestre og tror de er et offer for krefter de ikke har noen innflytelse på
- ❑ Dårlig prøveresultat: «Jeg er ikke smart nok, dette er urettferdig, jeg kan ikke matte»
- ❑ Tenker vi at evner og intelligens er dynamiske: Alle kan lære og utvikle sine evner?
- ❑ «Dette er jeg sikker på at du kan lære deg...»
- ❑ Eleven vet at de er den viktigste aktører i sin egen læring
- ❑ Dårlig prøveresultat: «Jeg burde vært bedre forberedt. Dette skal jeg gjøre bedre neste gang. Jeg vet jeg kan bedre»





Takk for oppmerksomheten

