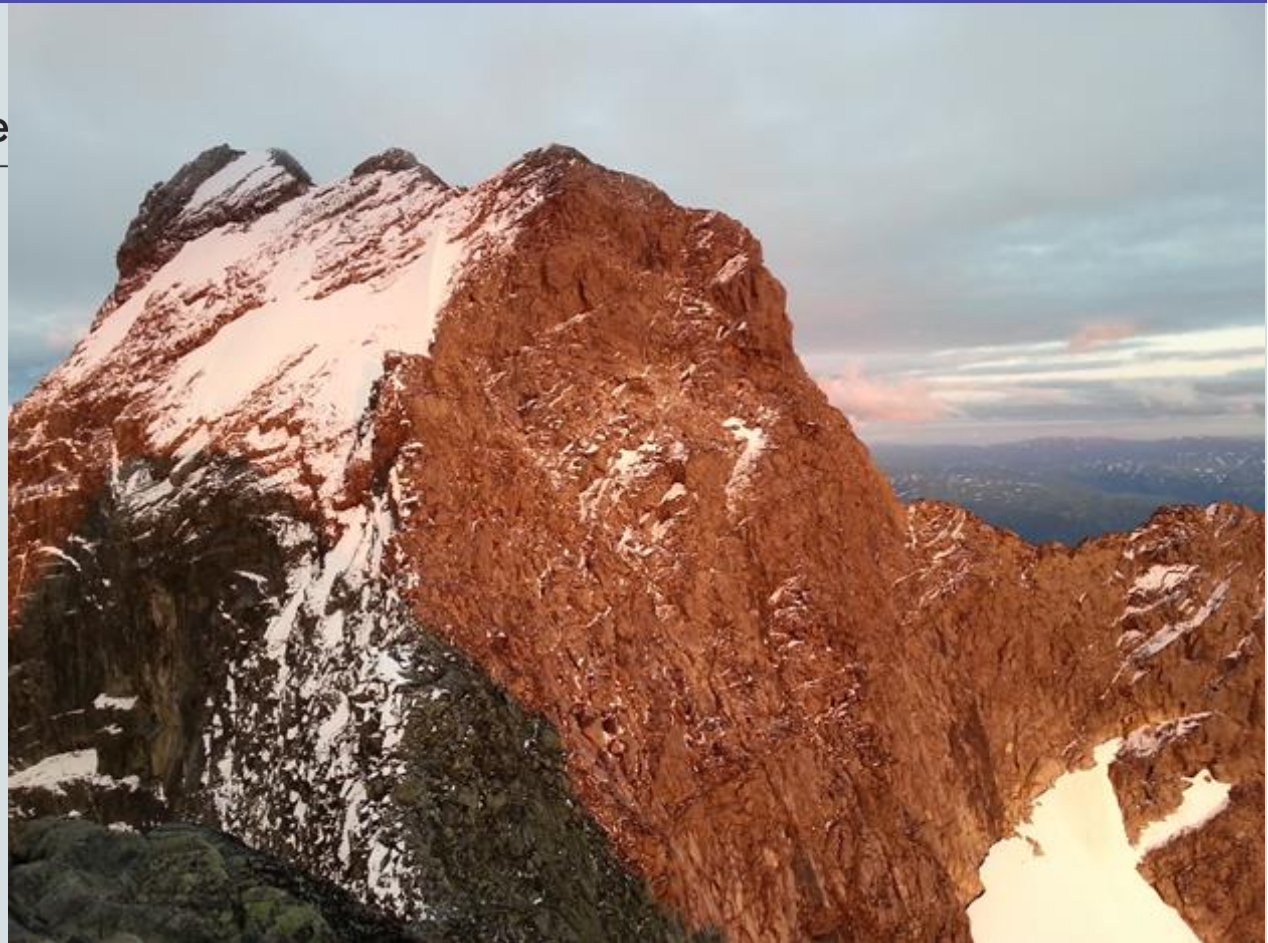


## Barn beviser

**Andrea Hofmann og Sigurd Hals**

Førsteamanuensis og Stipendiat  
Fakultet for Humaniora, Idretts-  
og Utdanningsvitenskap



# Holdninger til bevis

- "Bevis er kun for matematikere."
- "Bevis er kun for de spesielt begavede elevene."
- "Bevis bruker et matematisk språk som ligger på et høyt nivå."
- "Det er nok å se på noen eksempler."
- "Deduktive bevis er ingen bevis."

# Empiriske funn om elevers kunnskap

- Mange elever godtar eksempler som verifikasjon.
- Prøver å finne moteksempler til noe allerede bevist.
- Godtar ikke moteksempler.
- Gir empiriske bevis.
- Kan ikke skrive korrekte bevis.

## Konklusjon

Det er viktig å bli kjent med matematisk utforskning og argumentasjon.

Observasjoner – formodninger - eksempler – generelle sammenhenger – bevis

# Bevisets mange funksjoner i matematikken

- nesten uavhengig av form

## Kritisk diskusjon

- Evaluerer argumenter

## Verifisere eller avkrefte

- Bekrefte at noe er som det er
- Dette står i kontrast til psykologien av det å forstå

## Systematisere

- Synliggjør strukturen som er fremkommet i det ikke deduktive prosess.
- Kan også settes i relasjon til Lakatos

## Forklare

- Skille mellom de bevisene som er forklarende og ikke forklarende.
- Redegjør for egenskapene til enhetene og relasjonene i beviset

## Kommunikasjon

- Største delen av matematikk er kommunisert gjennom bevis

## Utforskning

- Gjennom systematiseringen vil det være mulig å gjøre oppdagelser

## Problemløsning

- For å vite at et problem er løst må svaret begrunnes

## Estetisk

- Noen bevis kan gi en estetisk opplevelse
- Knyttes til forklaring

## Selvrealisering

- Hobby
- Virkeliggjøre egne tanker

# Hva er et bevis i skolen

1. Bruker utsagn som er sanne og allerede akseptert av klassefelleskapet uten videre forklaringer
2. Bruker resonnementer som er gyldige og kjent for, eller innenfor rekkevidde, klassefelleskapet.
3. Kommuniserer med uttrykksformer som er passende og kjent for eller forståelig for klassefelleskapet.

Balansere mellom matematikk som en disiplin og elever som lærende.

Begreper som: *sann, gyldig, og passende* skal sees i en matematikkfaglig sammenheng.

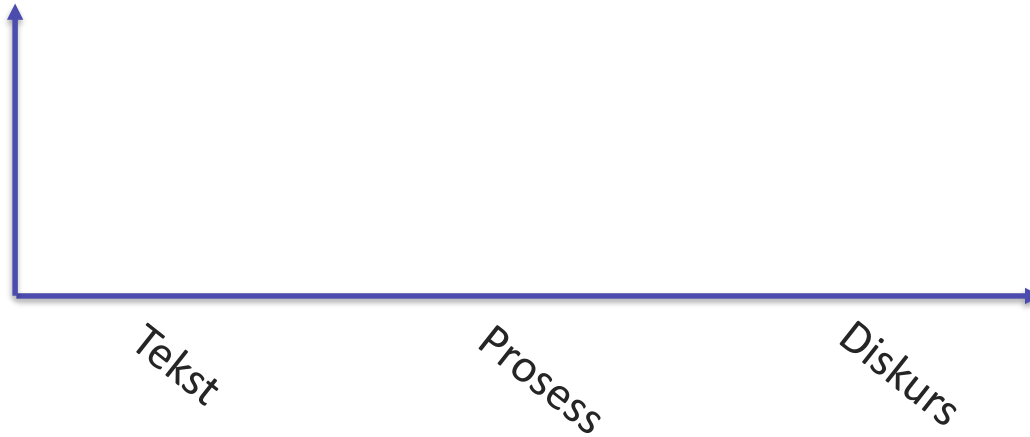
Begreper som *akseptert, kjent og konseptuelt-tilgjengelig* refereres det til klassefelleskapet.

(Stylianides 2007 s. 309 )

# Form og fokus

Formelt

Ikke  
formeldt



# Elevens intellektuelle behov for bevis

- et behov som må nærres

---

## Behov for sikkerhet

- Eleven kan ofte søke sikkerhet gjennom eksempler for egen overbevisnings skyld
- Hvordan komme til en mer allmenngyldig begrunnelse

## Behov for årsak

- For å kunne svare på spørsmålet *hvorfor* og *hvordan*.

## Didaktiske grep

- Skape kognitive konflikter
- Skape usikkerhet

# Argumentasjon og bevis - oppgavetyper

---

Nøkkelord: forklar, beskriv, forutsi, vis, lag en regel, forklar hvorfor, forklar hvordan, begrunn, bevis

Oppgavetyper

Lage en påstand

Begrunne  
en påstand

Lage og  
begrunne en  
påstand

Evaluerer en  
begrunnelse



# Regning med parenteser

**1.66** Ulrik har noen penger. Han kjøper en sjokolade og en eske drops. Dette regneuttrykket viser hvor mye han har igjen.

$$20 - (13 + 7)$$

Hvem av elevene forklarer regneuttrykket best?  
Begrunn svarene dine.

A

Jeg tenker at Ulrik har 20 kr, så koster sjokoladen og dropsen 13 kr, og så får han 7 kr tilbake. Det blir  $20 - 13 = 7$ .



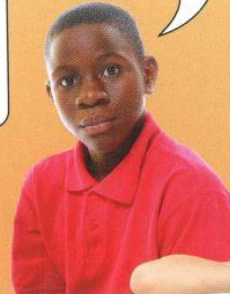
B

Jeg tenker at Ulrik har 20 kr, så koster sjokoladen og dropsen 13 kr, så får han 7 kr av noen. Det blir  $20 - 13 + 7 = 14$ .



C

Jeg tenker at Ulrik har 20 kr. Så koster sjokoladen 13 kr og dropsen 7 kr, til sammen 20 kr. Det blir  $13 + 7 = 20$  og  $20 - 20 = 0$ .



D

Jeg tenker regneuttrykket er feil. Ulrik har 20 kr. Sjokoladen koster 13 kr og dropsen 7 kr. Regnestykket blir  $20 - 13 - 7 = 0$ .



# Elevbesvarelsenes fire **former**

Hva er det som overbeviser?

- **Naiv empirisme**
  - Konkluderer ut ifra et lite antall (enkle) eksempler.
  - Er uutviklet og ikke sikkert.
- **Det avgjørende eksperimentet**
  - Et eksempel som ikke er for spesielt, og imøtegår skepsisen.
  - Om det gjelder for dette eksempelet så gjelder det for alle.
  - Fungerer som bevis når det motbeviser.
- **Det generaliserende eksempelet**
  - Trekker ut det generelle av et eksempel.
- **Tanke eksperimentet**
  - Matematisk resonnement som ikke er basert på eksempler og/eller en representasjon.
  - Verifikasjon er basert på egenskaper til objektene som forekommer i påstanden. Egenskapene er formulert på en generell måte.
  - Kunne gi et eksempel ut ifra logisk resonnement.

Hensikten er at eleven skal bli kjent med de ulike tenkemåter.  
Ikke ment som en utviklingsvei.

Mangler utforskning og dannelse av antagelser.

## Våre eksempler

Summen av to oddetall er alltid et partall fordi  $5+9=14$ . Og 14 er et partall.

$101+3333=3434$ . Det bare må gå!

Ser man på 5 så er det en mer enn 4 som er partall. Legger vi 5 til 3 som er en mindre en 4. Da blir de tilsammen et partall.



Et oddetall er alltid en mer enn et partall. Det vil da alltid være en til overs når det deles på to. Når man deler summen av to oddetall vil det ikke være noe til overs.

# Tenkning

---

## Deduktiv tenking

Skaper en forståelse ut ifra generelle antagelser og prinsipper

## Induktiv tenking

Skaper en forståelse som bygger på erfaringer

# Den ene og den neste

Skriv ned hvilket som helst tall opp til femten. Skriv ned tallet som kommer etter. Summer de to tallene og skriv ned svaret. Du har nå skrevet ned tre tall.

Noen påstår at kun et av tallene er i denne listen med tall

... ,3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

Prosess

5 min individuelt

Spørsmål

- Er det riktig?
- Er det alltid slik for tall opp til femten?
- Gjelder det for alle hele tall?
- Forklar hvorfor/hvorfor ikke.

# Imaginære samtaler som didaktisk metode

---

Eleven skriver en imaginær dialog om som utforsker et matematisk fenomen. Dialogen skal være mellom to eller flere personer. Hensikten med dialogen er å komme til en forståelse av fenomenet.

Imaginær dialog kan gjøre elevene oppmerksom på hvordan argumentene vil kunne møte motargumenter. De vil også erfare hvordan det er noe som er bedre argumenter enn andre.

Hensikten her er at vi her skal bli bedre kjent med de ulike nivåer av elevbesvarelser og utforske ideer på hvordan utnytte nivåene.

# Novemberkonferansens imaginære samtaler

- Grupper på tre skal skrive imaginære samtaler. 30 minutter
- Samtalen skal dreie seg om løsning av oppgaven under. Dialogen skal gå gjennom de ulike argumentasjonsformer beskrevet av Balacheff.
- Det må være minst to elever og eventuelt en lærer i dialogen.
- Dialogen kan benytte både tekst, symboler og illustrasjoner. Analogt eller digitalt.
- Hensikten med den imaginære samtalen er å bli kjent med de ulike tenkemåtene og argumenter som brukes. Hva skal dere tenke på når dere skriver samtalen:
  - Hvordan tenker elever og hvilke argumenter bruker de.
  - Hvordan kan læreren være med i en dialog under de ulike argumentasjonsformene.
  - Hvordan kan elevene bli kjent med sin egen og andres argumentasjonsform og få en forståelse for deres kvaliteter. (Karakteristikk, styrker og svakheter)
  - Tenker over hvordan imaginære samtaler kan brukes i matematikkundervisningen.

# Referanser

---

Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359-387.

Askevold, G.-A. & Lekaus, S. (2014). Matematisk argumentasjon gjennom "imaginære dialoger". *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 4.

Askevold, G.-A. & Lekaus, S. (2015). Elevar si argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 1.

Stylianides, A. J. (2007). "Proof and Proving in School Mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education* 38(3): 289-321.

Stylianides, A. J. (2007). "The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics." *Educational Studies in Mathematics* 65: 1-20.