

**Oppgave 1**

Punktene  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  ligger på linje med innbyrdes avstander  $AB = 3$ ,  $BC = 6$ ,  $CD = 8$  og  $DE = 4$ .

**Hva er minste mulige verdi for  $AE$ ?**

A 0

B 1

C 2

D 3

E 5

Tips til veiledning:

- Tegn!
- Start med å tegne ei lang rett linje, plasser  $A$  og  $B$  på linja og plasser de øvrige punktene ut fra disse to.
- Fins det flere mulige plasseringer av punktene? Vis ved å tegne.

Videre utforskning:

- Hvor stor er den lengste mulige verdien for  $AE$ ?
  - Hvor mange mulige verdier kan  $AE$  ha? Hvilke verdier er det?
- 

**Oppgave 2**

Per, Ragnar og Lars bor i samme nabolag. De har funnet ut at det er 250 m i luftlinje fra Per til Ragnar, og 300 m fra Ragnar til Lars.

**Hva er det beste man kan si om avstanden fra Per til Lars basert på disse opplysningene?**

- A Avstanden er akkurat 550 m.
- B Avstanden kan være alt mellom 0 m og 550 m.
- C Avstanden kan være alt mellom 50 m og 550 m.
- D Avstanden kan være alt mellom 250 m og 300 m.
- E Avstanden kan være hva som helst.

Tips til veiledning:

- Tegn!
  - Tegn inn flere mulige plasseringer av husene til de tre guttene.
  - Hvem er det enklest å ta utgangspunkt i?
  - Vi kjenner avstanden fra Ragnar til både Per og Lars. Ta utgangspunkt i Ragnars hus og marker alle punkter hvor Pers hus kan ligge. Marker deretter alle punktene hvor Lars' hus kan ligge.
  - Fins det flere mulige avstander mellom Per og Lars? Forklar.
- 

### Oppgave 3

$ABC$  er en likesidet trekant. En sirkel med radius 1 tangerer linjen  $AB$  i punktet  $B$  og linjen  $AC$  i punktet  $C$ .

Hva er sidelengden i trekanten  $ABC$ ?

$A \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \quad B \quad \sqrt{3} \quad C \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad D \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad E \quad 2$

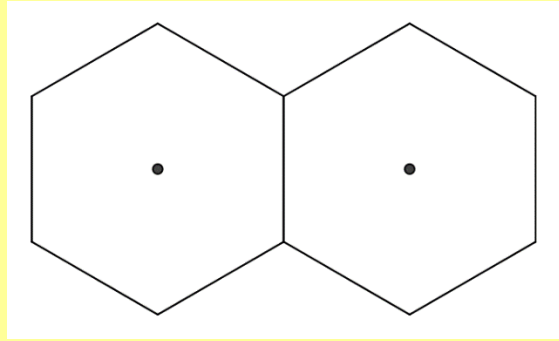
Tips til veiledning:

- Tegn og kontroller at figuren oppfyller kravene i oppgaven!
  - Det kan være lettere å tegne hvis dere forlenger sidene  $AB$  og  $AC$  forbi  $A$  og  $C$ .
  - Hvordan ligger sirkelen i forhold til trekanten  $ABC$ ? Hvor ligger sirkelens sentrum?
  - Hva vil det si at en sirkel tangerer ei linje?
  - Hvilke opplysninger trenger dere for å kunne regne ut lengden av sidene i trekanten  $ABC$ ?
  - Tegn radiene fra sentrum ut til tangeringspunktene. Hvor stor er vinkelen mellom en tangent og radien ut til tangeringspunktet?
  - Tegn hjelpelinje fra  $A$  til sentrum i sirkelen. Hva slags trekanter får du nå?
  - Finn vinklene i trekantene du tegner. Skriv dem på figuren.
  - Hva er sammenhengen mellom sidelengdene i disse trekantene?
  - Hva vet dere om sidene til en rettvinklet trekant med vinkler på  $30^\circ$  og  $60^\circ$ ?
-

**Oppgave 4**

To regulære sekskanter med sidelengde 1 deler en side.

Hva er avstanden mellom sentrene i sekskantene?



A  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     B 1    C  $\sqrt{2}$     D  $\frac{\sqrt{10}}{2}$     E  $\sqrt{3}$

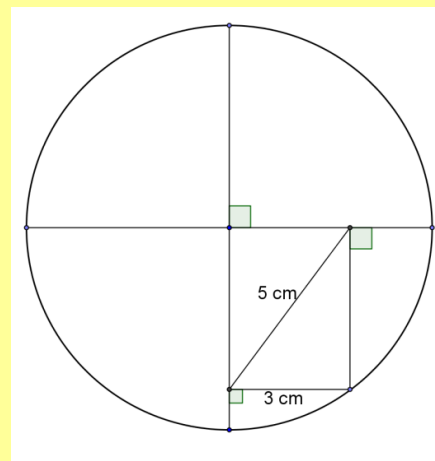
Tips til veiledning:

- Skriv på figuren de lengdene dere kjenner.
- Hva betyr det at sekskantene er regulære?
- Hvor finnes sentrum i en sekskant?
- Hvilke opplysninger trenger dere å finne avstanden mellom sentrene?
- Tegn hjelpelinjer som dere kan ha bruk for.
- Hvis dere markerer noen trekantene: hva slags trekant er det? Kjenner dere noen vinkler i disse trekantene?
- Hva er forholdet mellom sidene i trekantene med vinkler på  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ?

**Oppgave 5**

Hvor lang er diameteren i sirkelen?

A 7 cm    B 8 cm    C 9 cm  
D 10 cm    E 11 cm

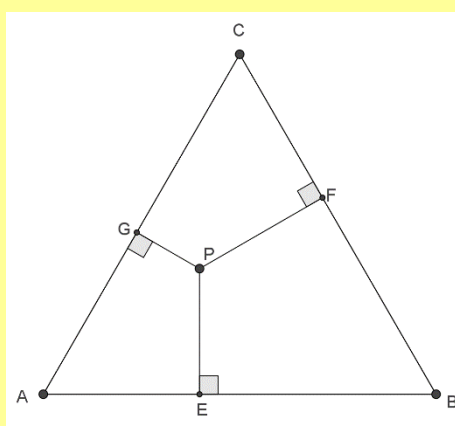
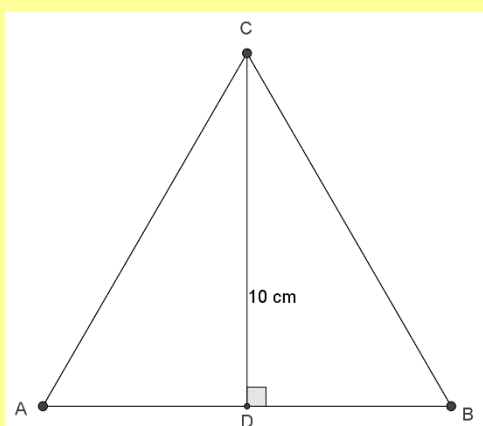
Tips til veiledning:

- Finn et rektangel i figuren og marker det. Hvorfor er det et rektangel?
- Hvor lang er diagonalen i rektangelet?
- Har rektangelet mer enn en diagonal?
- Tegn den andre diagonalen. Hvor lang er den?

### Oppgave 6

I den likesidede trekanten  $ABC$  er høyden 10 cm. Det plasseres et punkt  $P$  inne i trekanten, og normalene fra  $P$  til de tre sidene tegnes.

Hvor lang er summen  $PE + PF + PG$ ?



A 8,5 cm

B 9,5 cm

C 10 cm

D 12 cm

E det er umulig å si

#### Tips til veiledning:

- Prøv å tegne hjelpelinjer i figuren til høyre.
- Del opp figuren til høyre i tre trekanter ved å tegne hjelpelinjer fra hvert hjørne til  $P$ .
- Sammenlign uttrykket for arealet til trekanten  $ABC$  og summen av arealene til de tre trekantene i hjelpefiguren.
- Sammenlign lengden av grunnlinjene i trekantene  $ABC$ ,  $ABP$ ,  $BCP$  og  $ACP$ ?
- Og hva er høydene i disse fire trekantene?
- Sett uttrykket for arealet av trekant  $ABC$  lik summen av arealene til trekantene  $ABP$ ,  $BCP$  og  $ACP$ . Forenkle uttrykket.

Videre utforskning:

Denne oppgaven kan elevene forske mer på i GeoGebra:

- Tegn en likesidet trekant med høyde 10 (hvordan vil dere gjøre det?).
- Plasser et punkt  $P$  inne i trekanten og tegn normalene fra  $P$  ut på alle sidene. Marker dem som linjestykker slik at dere får oppgitt lengdene på hver av dem.

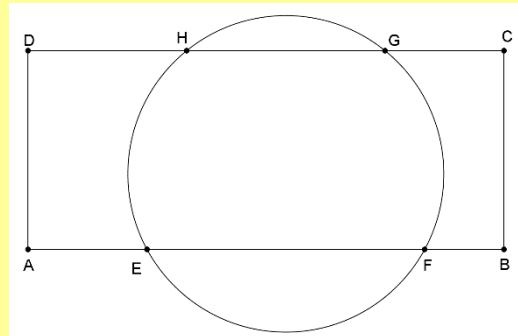
- Lag et uttrykk med summen av lengdene av de tre normalene og sammenlign med trekantens høyde.
- Flytt  $P$  rundt inne i trekanten og observer hvordan det går med summen av lengdene til de tre normalene. Hvorfor er det slik?

### Oppgave 7

Rektangelet  $ABCD$  skjærer sirkelen i punktene  $E, F, G$  og  $H$ .

$AE = 3$  cm,  $DH = 4$  cm og  $HG = 5$  cm.

**Hvor langt er det mellom E og F?**



- A 6 cm      B 7 cm      C  $20/3$  cm      D 8 cm      E 9 cm

#### Tips til veiledning:

- Skriv de oppgitte målene på figuren og marker lengden dere skal finne.
- Tegn hjelpelinjer. Prøv dere fram.

Hvis elevene tegner trapeset  $EFGH$ :

- Hva vet dere om denne figuren som kan hjelpe dere med å finne  $EF$ ?

Hvis elevene tegner et rektangel der  $GH$  er den ene siden og en side ligger langs  $AB$ :

- Hva vet dere om denne figuren som kan hjelpe dere med å finne  $EF$ ?

Tilsvarende hvis elevene tegner et rektangel der  $EF$  er den ene siden og den andre siden ligger langs  $CD$ .

Hvis elevene tegner midtnormalen på  $HG$ :

- Hvordan vil denne linja gå gjennom sirkelen? Hvordan vil den gå i forhold til  $EF$ ?
- Hva er avstanden til denne normalen fra  $D$  langs  $DC$ ? Og hva er avstanden til denne normalen fra  $A$  langs  $AB$ ?

Ekstra utfordring:

Har størrelsen av rektangelet noe å si for løsningen?

Fasit:

Oppgave	Løsning
1	B
2	C
3	B
4	E
5	D
6	C
7	B

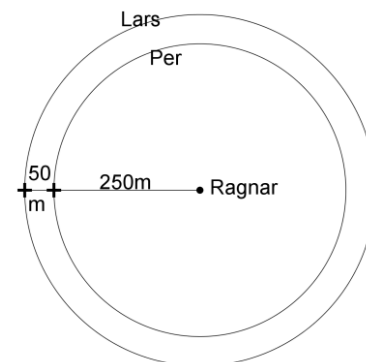
Forklaringer:

## Oppgave 1

Ekstra utfordring: Det fins 8 mulige verdier av  $AE$ : 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15 og 21.

## Oppgave 2

Lars kan bo hvor som helst på den ytre sirkellinja og Per hvor som helst på den indre sirkellinja.



## Oppgave 3

$$\angle BAS = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \text{ og } \angle ABS = 90^\circ$$

Da er  $\angle ASB = 60^\circ$

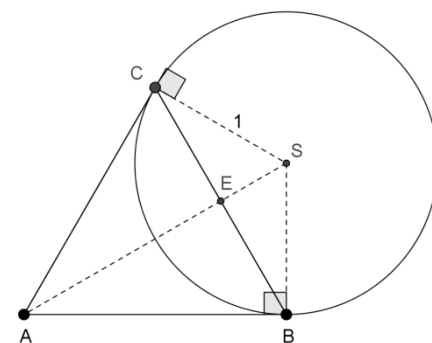
$AS \perp BC \Rightarrow$  vinklene i  $EBS$  er hhv.  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  og  $60^\circ$

$$\text{Da er } ES = \frac{1}{2}BS = \frac{1}{2}$$

Bruker Pytagoras' setning på  $EBS$ :

$$BE = \sqrt{BS^2 - ES^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB = AC = BC = 2 \cdot BE = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

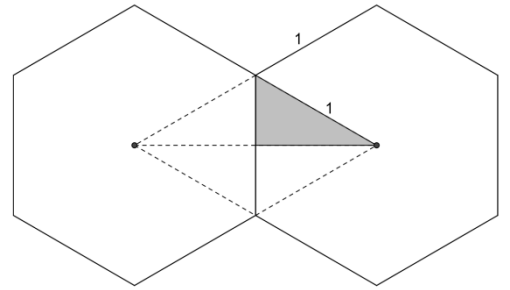


**Oppgave 4**

Forklaring og hjelpefigur:

Avstanden mellom de to sentrene er det dobbelte av høyden i en likesidet trekant med sidekant 1. Ovenfor fant vi at den

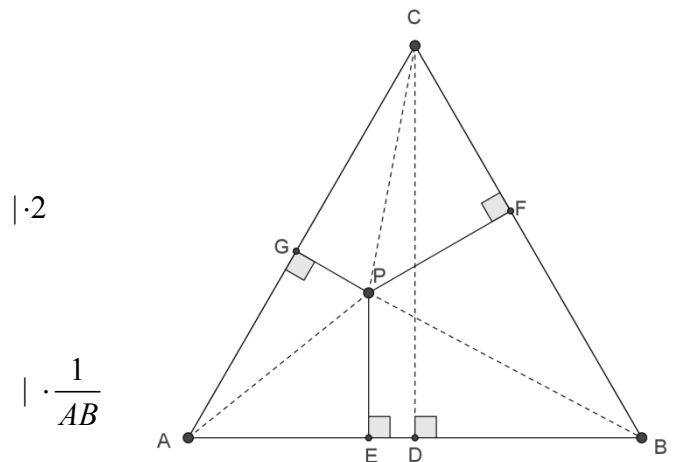
lengste kateten i den mørke trekanten på figuren er  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , og dette er høyden i den likesidede trekanten med sider 1. Da er avstanden mellom sentrene  $\sqrt{3}$ .



**Oppgave 6**

Sammenligner arealer:

$$\begin{aligned}
 ABC &= ABP + BCP + ACP \\
 \frac{AB \cdot CD}{2} &= \frac{AB \cdot EP}{2} + \frac{BC \cdot FP}{2} + \frac{AC \cdot GP}{2} \\
 AB = BC = AC &\Rightarrow \\
 AB \cdot CD &= AB \cdot EP + AB \cdot FP + AB \cdot GP \\
 AB \cdot CD &= AB \cdot (EP + FP + GP) \\
 CD &= EP + FP + GP
 \end{aligned}$$



**Oppgave 7**

Linja gjennom sentrum av sirkelen som står vinkelrett på  $AB$  og  $CD$ , vil halvere  $EF$  og  $GH$ .