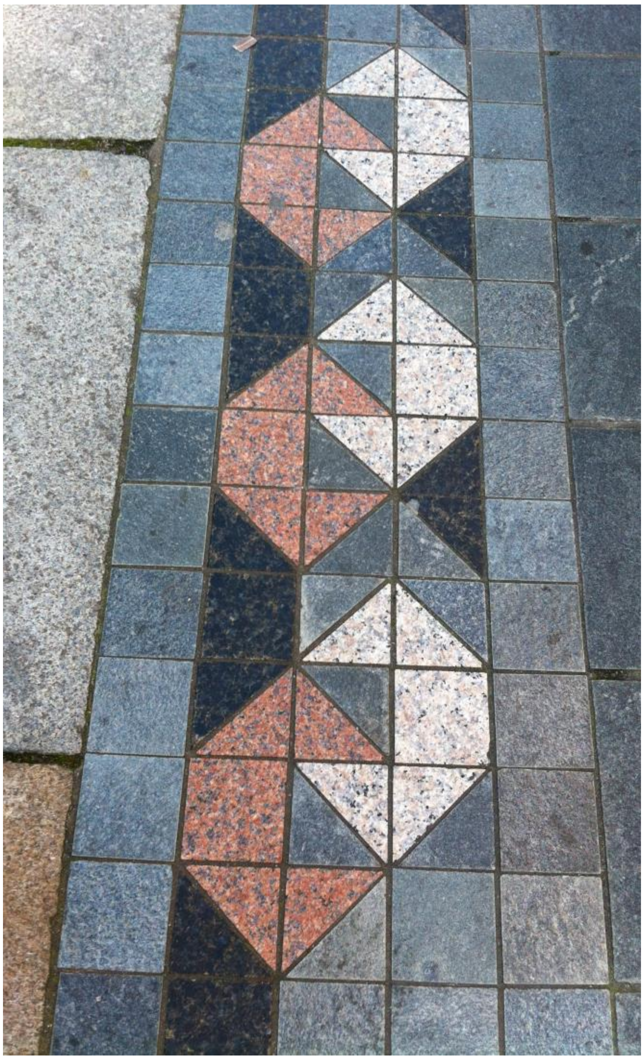
Kognitive krav i matematikkoppgaver

Forfatter
Anita Valenta, Matematikksenteret

Publisert dato: September 2016



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

Det er forskjellige måter å klassifisere matematikkoppgaver på. Noen oppgaver karakteriseres som individuelle- eller gruppeoppgaver ut fra arbeidsmåten. Arbeid over lengre tid med en problemstilling kalles ofte for prosjekt. Noen ganger ser man på i hvilken grad oppgaven omhandler matematiske anvendelser i hverdagen og skiller mellom praktiske og teoretiske oppgaver. Problemløsningsoppgaver er gjerne oppgaver der elever ikke har blitt presentert for en mulig fremgangsmåte på forhånd. Rike matematiske oppgaver er ofte oppgaver med flere mulige løsninger. Rike oppgaver er problemløsningsoppgave som byr på muligheter til diskusjoner med andre når det gjelder ideer til løsninger og forståelse av matematiske begreper. Oppgaver der det er mulig å velge ulike fremgangsmåter eller få flere riktige svar kalles ofte for åpne oppgaver.

Oppgaveløsingen har tradisjonelt en sentral rolle i matematikkundervisningen, og en sentral del av matematikklærerens arbeid er valg eller utforming av oppgaver elevene skal arbeide med. Oppgavene elevene får arbeide med har stor betydning for hva de lærer og hvor motivert de blir for faget. Det er viktig at lærere er bevisste på det når de velger oppgaver. Valg av oppgavetyper elevene får arbeide med har innvirkning på hvordan elevene oppfatter matematikk. De kan enten komme til å se på matematikk som et fag der det er viktig å huske, eller et fag der det viktig å tenke logisk og selv finne ut hvordan man kan løse problemer.

For å få tydelig frem muligheter for læring i ulike matematikkoppgaver og hvilken type tankevirksomhet de krever av eleven, analyserer Stein og Smith (1998) matematikkoppgavene ut fra kognitive krav de stiller. De skiller mellom matematikkoppgaver som stiller lave kognitive krav og oppgaver som stiller høye kognitive krav. Oppgaver som går på memorering eller prosedyrer uten sammenhenger stiller lave kognitive krav. Oppgaver som går på prosedyrer med sammenhenger eller matematisk tenking stiller høye kognitive krav. Nedenfor er de ulike oppgavetypene beskrevet ved å fremheve noen kjennetegn og eksempler.

En og samme oppgave kan selvsagt brukes i undervisningen på ulike måter, avhengig av forkunnskapene til elevene og diskusjonen læreren legger opp til i arbeidet med oppgaven. Likevel kan man si at noen oppgaver i utgangspunktet har høye eller lave kognitive krav og gir ulike muligheter for læring slik det påpekes i eksemplene nedenfor.

Oppgaver med lave kognitive krav – Memorering

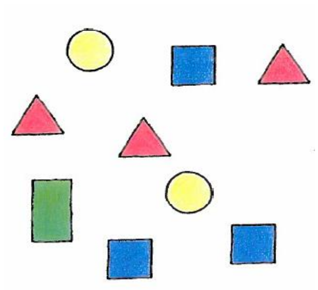
Kjennetegn på slike oppgaver kan være at

- de går på reproduksjon eller bruk av fakta, regler, formler eller definisjoner der hensikten er memorering
- det ikke er mulig å bruke noen strategier, enten fordi det ikke finnes noen strategi eller fordi tiden som er satt av ikke er tilstrekkelig til å finne en
- det er liten tvil om hvordan elevene skal angripe oppgavene; de går på eksakt reproduksjon av noe elevene har arbeidet med før
- oppgavene knytter ikke fakta, regler, formler og definisjoner til underliggende begreper og sammenhenger

Eksempler:

Hvor mange cm er det i en meter? Dette er et spørsmål som handler om fakta, og hensikten med spørsmålet er gjerne reproduksjon og memorering.

Hvilke geometriske figurer finner du på bildet?



Figurene som er tatt med i oppgaven er typiske eksempler på de ulike geometriske formene, og alle står med "bunnen" horisontalt på arket. Det ser dermed ut til at oppgaven går på gjenkjenning og bruk av geometriske ord, uten at det nødvendigvis blir lagt opp til videre utvikling av begrepsforståelsen til elevene.

Oppgavene nedenfor går på automatisering av den lille gangetabellen. Hvis elevene arbeider med å finne svaret på de ulike regnestykkene, og tilbakemeldingen fra læreren bare er en kontroll på om svarene er riktige eller gale, handler oppgaven mest om å memorere. Hvis læreren derimot legger vekt på relasjonene mellom de ulike regnestykkene og legger opp til en diskusjon om hvorfor relasjonene oppstår, kan oppgaven åpne for noe mer enn memorering.

Regn ut

$4 \cdot 2 =$ ___	$7 \cdot 2 =$ ___	$3 \cdot 4 =$ ___
$2 \cdot 4 =$ ___	$8 \cdot 2 =$ ___	$6 \cdot 4 =$ ___
$6 \cdot 3 =$ ___	$9 \cdot 2 =$ ___	$4 \cdot 3 =$ ___
$3 \cdot 6 =$ ___	$5 \cdot 5 =$ ___	$8 \cdot 3 =$ ___
$4 \cdot 5 =$ ___	$6 \cdot 5 =$ ___	$3 \cdot 5 =$ ___
$5 \cdot 4 =$ ___	$7 \cdot 5 =$ ___	$6 \cdot 5 =$ ___

Oppgaver med lave kognitive krav – Prosedyrer uten sammenhenger

Kjennetegn på slike oppgaver kan være at

- målet er å øve på en algoritme. Oppgavene legger opp til bruk av spesifikke prosedyrer som elevene har arbeidet med før. De kan enten angi hvilken prosedyre elevene skal bruke, eller indikere en prosedyre mer indirekte ut fra tidligere arbeid, erfaring eller tidligere bruk av oppgavetypen
- det er liten tvil om hva elevene skal gjøre og hvordan de skal gjøre det
- prosedyren elevene skal bruke ikke blir knyttet til underliggende begreper og sammenhenger
- det er fokus på riktig svar uten at det er nødvendig å utvikle en forståelse
- oppgavene ikke krever noen forklaring eller begrunnelse, eller at en beskrivelse av prosedyren man har brukt blir godtatt som tilstrekkelig forklaring/begrunnelse

Eksempler:

I disse oppgavene er regnestykkene stilt opp som i en standardalgoritme og det er ikke noen relasjon mellom tallene i de ulike stykkene. Oppgaven ser ut til å handle om å øve på en algoritme elevene har fått presentert tidligere, og den krever ingen begrunnelse eller forståelse for prosedyren.

Regn ut

		5	7
+		3	8
=			

	1	5	3
+	2	6	2
=			

	3	2	5
+	1	3	5
=			

	1	4	6
+		3	8
=			

	2	7	1
+	2	2	5
=			

	2	6	3
+	1	4	5
=			

Anne har 4 klistremerker, så får hun 3 til fra sin bestemor. Hvor mange har hun nå?
Dette er en oppgave som kan være krevende for mange små barn, men for elever som har arbeidet mye med lignende oppgaver handler dette gjerne om en prosedyre. Eleven finner tallene og "signalordene" de kjenner fra før (som *får* eller *til sammen* i addisjon), skriver et regnestykke og regner ut. Oppgaven utfordrer dem ikke på hvorfor dette er addisjon eller hvorfor strategien de bruker er gyldig.

Oppgaven indikerer implisitt en prosedyre elevene bør følge. Det er liten tvil om hva elevene bør gjøre og det er ikke nødvendig å forstå prosedyren for å få riktig svar.

Du kjøper

Rund av til nærmeste tier og gjør overslag

____ + ____ ≈ ____ + ____ = ____

____ + ____ ≈ ____ + ____ = ____

Oppgaver med høye kognitive krav – Prosedyrer med sammenhenger

Kjennetegn på slike oppgaver kan være at

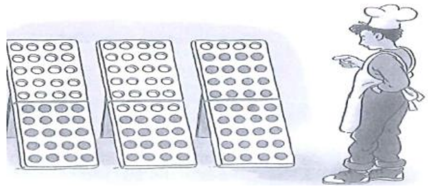
- oppgavene fokuserer på å utvikle bedre forståelse for matematiske begreper og ideer ved hjelp av prosedyrer
- de antyder brede og generelle strategier for å finne en løsning, strategier som knyttes til de underliggende begreper som begrepet areal eller begrepet multiplikasjon. Oppgavene fokuserer ikke på algoritmer som kan være et hinder for å utvikle begrepsmessig forståelse
- begrepene og prosedyrene i representeres på ulike måter – diagrammer, konkreter, symboler, regnefortellinger, illustrasjoner – siden ulike representasjoner og sammenhenger mellom dem kan støtte utviklingen av begrepsmessig forståelse
- selv om det er en prosedyre som skal følges i oppgaven, kan den ikke følges blindt, og elevene må forsøke å forstå de underliggende begrepene og sammenhengene i arbeidet med oppgaven

Eksempler:

Hvis vi tenker på 3 · 17 som 3 bunker med 17 klosser i hver bunke, hvordan kan vi da forklare at 3 · 17 = 3 · 10 + 3 · 7? I oppgaven blir multiplikasjon representert symbolsk og gjennom en regnefortelling. Strategien som fremheves er viktig som en prosedyre innen multiplikasjon, og i oppgaven legges det til rette for at elevene skal videreutvikle sin forståelse for strategien ved å resonnere med utgangspunkt i en regnefortelling.
Noen elever har foreslått følgende strategier for å beregne 75 · 89: *(10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5) · 89* *7 · (10 · 89) + (10 · 89) : 2* *75 · (100 – 10 – 1)* *Kommer alle disse strategiene til å gi riktig svar? Hvorfor? Kan du si det uten å regne ut?* I oppgaven presenteres ulike strategier og fokuset er på fremgangsmåtene, ikke svaret. For å utforske gyldigheten av de ulike strategiene er det nødvendig å gi mening til begrepet multiplikasjon, gjennom en illustrasjon eller regnefortelling, eller å resonnere med utgangspunkt i egenskapene til multiplikasjon som er kjent for elevene fra før.

Oppgaven under er av samme type som de to over, men her er det både en illustrasjon, regnefortelling og symbolske uttrykk som skal utnyttes for å styrke elevenes forståelse for multiplikasjon og ulike strategier innen multiplikasjon.

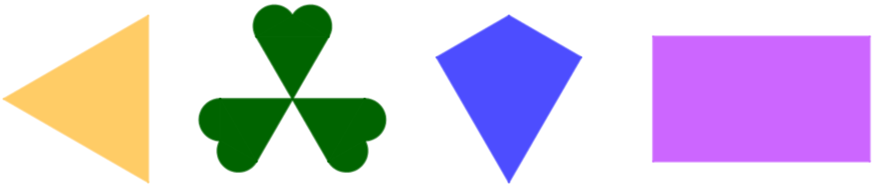
Bruk bildet av brett med muffins til å vise at $9 \cdot 4$ er det samme som $5 \cdot 4 + 4 \cdot 4$. Hvordan kan du bruke bildet til å vise at $9 \cdot 4$ er det samme som $10 \cdot 4 \quad 4$?



Lag en oppgave der du viser at du kan tierovergang i addisjon.
Lag også en oppgave som vi kan teste andre på.

Oppgaven legger ikke opp til en gitt prosedyre, men fremhever heller et viktig begrep i arbeid med addisjon. Eleven skal lage en oppgave selv, og det kan bidra til bevisstheten om hva som kan være utfordrende med tieroverganger i addisjon.

Diskuter i gruppa hvordan dere ville gått frem for å finne hvilken av figurene som har størst/minst areal. Hvordan kan man finne arealet til de ulike figurene?



I denne oppgaven legges det vekt på begrepet areal, ikke ulike prosedyrer eller formler for å beregne areal. Et forslag til mulig fremgangsmåte kan være å bruke et rutenett. Hvis oppgaven skal brukes som en tilnærming til arealformelen for rektangel, kan det fremheves at det er enklere å finne arealet til rektangelet enn de andre figurene ved å bruke rutenett, og man kan prøve å dele de andre figurene opp for å få en mer rektangulær form.

Oppgaver med høye kognitive krav – Matematisk tenking

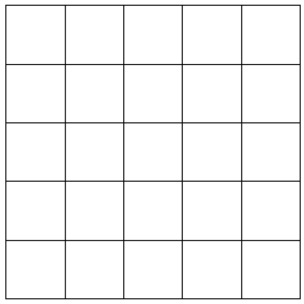
Matematisk tenking innebærer utforskning, systematisering, utvikling av strategier og resonnering. Kjennetegn på denne typen oppgaver kan være at

- de krever kompleks tenking for å finne en fremgangsmåte; arbeidet med oppgaven leder fram mot en kjent algoritme eller prosedyre som kan brukes på nytt uten videre

- oppgavene krever at elevene utforsker og utvikler forståelse for matematiske begreper, prosesser og relasjoner
- oppgavene krever en form for selvregulering av elevenes eget arbeid
- elevene må ta i bruk relevant forkunnskap og erfaring og finne en måte å bruke kunnskapen de allerede har i arbeidet med oppgaven
- det er innbakt i oppgavene at elevene selv må analysere oppgaven og finne ut hvilke fremgangsmåter som kan være aktuelle, begrunne valgene og vurdere om løsningen er rimelig
- oppgavene stiller høye kognitive krav som kan skape usikkerhet hos elevene på grunn av ukjente elementer i oppgaven

Eksempler:

Jeg hørte nylig en som sa: ”Når man multipliserer to tall som begge ender på 5, ender svaret alltid på 5.” Stemmer det? Hvorfor blir det slik? Det er en generell påstand elevene skal utforske og argumentere for, om noe gjelder for *alle* tall av en viss type. Da er det ikke nok bare å sjekke noen eksempler og argumentere for gyldigheten ut fra det. Oppgaven krever at elevene tar i bruk og videreutvikler sin forståelse innen multiplikasjon og posisjonssystemet. De må finne en hensiktsmessig måte å se multiplikasjon på, og de må beskrive tall som ender på 5 slik at tallenes struktur kommer tydelig frem og man kan se på hva som skjer når to slike tall blir multiplisert.
Hvis alle i vår klasse skal gi hverandre en klem, hvor mange klemmer blir det totalt? Oppgaven krever kompleks tenking for å finne en fremgangsmåte. Elevene må finne en måte å tenke systematisk på slik at alle klemmer blir telt, og det krever at de strukturerer og fremstiller situasjonen på en måte som åpner for det. Oppgaven er satt i en kontekst elevene kan forestille seg, og det gjør det mulig for dem å vurdere og sammenligne ulike fremgangsmåter.
Hvor mange personer er det plass til i gymsalen på vår skole? Elevene skal selv sette opp noen rammer som de finner rimelige. Hva skal personene gjøre i gymsalen og hvor mye plass må hver person ha? Hvilken informasjon trenger man da og hvordan kan man få fatt i den? Hvordan gå frem videre?

Hvor mange kvadrater klarer dere å finne i figuren? Hvordan vet dere at det ikke finnes flere enn de dere har funnet? Hva med et lignende kvadrat som er laget av 10 x 10 små kvadrater? Klarer dere å komme med en hypotese på hvor mange kvadrater det finnes i kvadratet med 10 x 10 små kvadrater, uten å lege en skisse og telle kvadratene? Hvordan tenker dere og hvorfor tror dere at dere har rett?  Oppgaven krever systematisk tenking, søk etter relasjoner, generalisering og argumentasjon. Behovet for å finne et system og en hensiktsmessig strategi melder seg allerede i det første steget, når man skal finne antall kvadrater på bildet. Videre i oppgaven skal elevene generalisere fremgangsmåten sin og argumentere for den.
Lag en regnefortelling som passer til regnestykket $6 : \frac{3}{4}$*. Bruk regnefortellingen til å finne svaret på regnestykket og forklar tankegangen din.* Elevers forståelse for begrepet divisjon og for prosedyren man bruker i divisjon med brøk blir utfordret i denne oppgaven. Elevene må finne en regnefortelling som gir mening til divisjon med brøk og resonnere omkring hvordan den kan brukes til å finne et svar. Oppgaven krever også at de presenterer sitt resonnement på en logisk måte.

Betydning av oppgaver med høye kognitive krav å utvikle matematisk kompetanse

Folk flest oppfatter matematikk som et fag der det hovedsakelig handler om å huske regler og prosedyrer og å kunne anvende dem riktig. Det er ikke noe å diskutere, være enig eller uenig i. Denne oppfatningen av faget har sammenheng med en tradisjon i matematikkundervisning der det å huske og å øve på prosedyrer, altså arbeide med oppgaver med lave kognitive krav, har stått sentralt. I 1973 reiste Erlwanger en diskusjon om hva elevene lærer i og om matematikk når regler og prosedyrer uten forståelse vektlegges i undervisningen. (Erlwanger, 1973). Artikkelen tar utgangspunkt i observasjoner av en elevs læring og oppfatning av matematikk og betraktes nå som en av klassikerne innen matematikkdidaktisk forskning. Betydningen av at elevene utvikler forståelse av matematiske begreper, ideer og prosedyrer, og at de utfordres til å komme med hypoteser, resonnere og utvikle strategier, er påvist i mange studier siden den gangen (se for eksempel Stein og Lane, 1996; Boaler, 1997, 1998; Smith & Stein, 1998; Stipek, Salmon, Givvin & Kazemi, 1998; Hiebert, 1999; Hiebert et al., 2003).

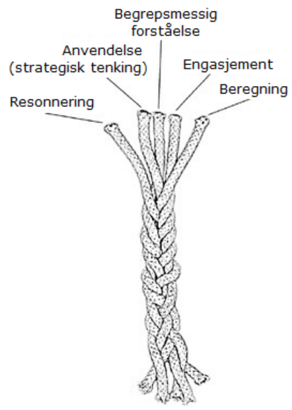
I sin undersøkelse sammenligner Boaler (1997, 1998) elevers opplevelse av matematikk i to skoler. I skole A arbeider elevene hovedsakelig med oppgaver med lave kognitive krav, memorering og prosedyrer uten forståelse. I skole B legger lærerne vekt på komplekse oppgaver som stiller høye kognitive krav. Datamaterialet i form av observasjon, intervjuer og tester ble samlet over flere år, og analysene til Boaler viste at:

- B-elevene trives bedre med faget, liker det bedre, betrakter det som et kreativt fag
- B-elevene «holder ut» lenger, prøver seg frem i større grad enn A-elevene; gir ikke opp, har tro på seg selv.
- A-elevene er mer passive, mindre engasjerte og kjeder seg i matematikktimene i større grad enn B-elevene
- B-elevene har bedre resultater på tester, til og med på tester som går på bruk av prosedyrer som A-elevene har jobbet mye mer med
- B-elevene har mye bedre resultater enn A-elevene når det gjelder problem elevene kan møte i sitt daglige liv
- A-elevene uttrykker i mye større grad enn B-elevene at de ikke forstår det de arbeider med i matematikktimene

De andre studiene som er nevnt ovenfor ser på litt ulike aspekter ved matematikklæring og undervisning og har noe ulike tilnærminger, men resultatene viser noe av det samme som studien til Boaler – i klasserom der det stilles høye kognitive krav til elevene lærer elevene mer og de er i større grad positivt innstilt til faget.

Et naturlig spørsmål kan være om oppgaver med høye kognitive krav kan passe for alle elever, da spesielt for de lavt presterende elevene. Studien til Boaler et al. (2000) viser at lærere har en tendens å til å anta at lavt presterende elever ikke kan dra nytte av slike oppgaver. Elevene får gjerne enkle oppgaver, ofte med steg-for-steg forklaringer og målet er at elevene lærere å gjennomføre en prosedyre uten at den nødvendigvis skal forstås. Flere studier, som for eksempel (Ahmad, 1987) viser at lavt presterende elever kan tenke matematisk og at de lærer bedre når de får mulighet til diskutere og utforske (se også Watson, 2001). Watson og De Guest beskriver i (2005) et prosjekt med lavt presterende elever der lærerne la vekt på å utfordre elevenes forståelse heller enn å forenkle matematiske ideer, la til rette for at elevene fikk utvikle og velge fremgangsmåter, resonnere og argumentere for egne ideer heller enn å memorere prosedyrer. Elevene i prosjektet hadde samme resultater på prosedyretester som elever i ”kontrollgruppa”, men de hadde bedre prestasjon på oppgaver med høye kognitive krav, likte matematikk bedre og var mer utholdende i arbeid med matematikk.

I en diskusjon om hvilken betydning oppgaver med høye kognitive krav kan ha i matematikkundervisning, kan man også spørre: *Hva er det meningen at elevene skal lære i matematikk*? Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter:



- Begrepsmessig forståelse – av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner
- Beregning – gjennomføring av prosedyrer fleksibelt, effektivt og nøyaktig
- Anvendelse – gjenkjenning og formulering matematiske problemer, utvikling av løsningsstrategier
- Resonnering – logisk tenking, refleksjon og argumentasjon
- Engasjement - se matematikk som fornuftig og verdifull, ha tro på at det er mulig bli kompetent i matematikk

Matematisk kompetanse innebærer altså mye mer enn å huske fakta og kunne følge en bestemt algoritme eller prosedyre. Skal elevene få mulighet til å utvikle en helhetlig matematisk kompetanse kan de ikke bare arbeide med oppgaver som stiller lave kognitive krav. Kilpatrick m.fl. (2001) understreker at de fem komponentene i matematisk kompetanse er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Det er ikke slik at elevene først må bli gode på beregning, for så senere å utvikle begrepsmessig forståelse og senere igjen resonnering. Komponentene ”vokser” sammen og de støtter hverandre Derfor er det viktig at elevene får mulighet til å utvikle alle fem komponentene samtidig. Dette innebærer at arbeid med oppgaver med høye kognitive krav ikke skal forbeholdes noen spesielle trinn, temaer eller tidspunkt i undervisning, for eksempel ved avslutning av et tema. Oppgaver med høye kognitive krav skal heller være et sentralt element i all undervisning.

Utvikling av oppgaver med høye kognitive krav

Det finnes mange gode nettsteder og andre kilder der man kan finne oppgaver som omhandler viktige matematiske ideer, som kan være motiverende for elevene og som stiller høye kognitive krav. Men gode oppgaver er ikke bare de man ”finner et sted”. En lærer kan også

$4 \cdot 5$
$4 \cdot 50$
$4 \cdot 49$
$4 \cdot 52$

lage dem selv, for eksempel med utgangspunkt i læreboka elevene bruker. Læreren vurderer om det er mulig å videreutvikle en gitt oppgave eller legge opp arbeidet med oppgaven slik at elevenes forståelse og resonnering blir utfordret. Boaler (2016) kommer med noen spørsmål man kan tenke gjennom i vurdering av en oppgave og planlegging av matematikkundervisning:

- Kan oppgaven oppmuntre til utvikling av ulike fremgangsmåter og bruk av ulike representasjoner?
- Kan oppgaven gjøres om litt slik at den vekker nysgjerrighet?
- Kan det være mulig å la elevene finne ulike strategier før en metode presenteres?
- Kan det være mulig å legge inn en visuell representasjon?
- Kan oppgaven utformes slik at den har ”lav inngang og høyt tak”, altså at det er mulig for alle elever å jobbe med den og lære noe nytt gjennom arbeidet?
- Kan det legges inn et krav om resonnering og argumentasjon?

For å ta et eksempel på hvordan en oppgave kan videreutvikles til å stille høyere kognitive krav, kan vi se på arbeid med å regne ut ulike regnestykker. I matematikkundervisning brukes slike oppgaver som oftest for automatisering og prosedyretrening. I stedet for å be elevene regne ut mange regnestykker som ikke er relatert til hverandre, kan en lærer heller velge en sekvens med 4-6 relaterte regnestykker og legge vekt på å engasjere elevene i en diskusjon om en gitt strategi i arbeid med en regneoperasjon[1]. En slik sekvens kalles for en oppgavestreng.[2] Ofte kan oppbygging av en oppgavestreng ses som "inngang - diskusjon – bruk - generalisering". Inngangen kan gjerne være noen enkle regnestykker som sikrer at flest mulig elever er med i diskusjonen fra starten av. Ofte brukes disse regnestykkene i arbeidet med de neste oppgavene i oppgavestrengen. Inngangen i oppgavestrengen over er regnestykkene $4 \cdot 5$ og $4 \cdot 50$. Videre i strengen kommer et eller to regnestykker som skal være sentrale i diskusjonen om den gitte strategien. I eksemplet vårt er det regnestykket $4 \cdot 49$. Her stiller læreren spørsmål om relasjonen til det forrige regnestykket, hvordan man kan utnytte det og hvorfor det kan være lurt å gjøre det. Rollen til det siste regnestykket i strengen, $4 \cdot 52$, er å bruke strategien og begrunnelsen på et nytt eksempel (mer om oppgavestrenger i Valenta (2016)). Gjennom arbeid med en oppgavestreng utfordres elevers matematiske tenking og forståelse for ulike begreper, relasjoner og prosedyrer.

---

[1] Arbeidet med oppgavestrenger er en del av prosjektet MAM – Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning, http://www.matematikksenteret.no/mam/

[2] Aktiviteten "oppgavestreng" er utviklet innen prosjektet *Contexts for learning mathematics*[2] (se for eksempel Fosnot & Dolk, 2001).

Kognitive krav ligger, som sagt, ikke nødvendigvis i oppgaven i seg selv, men i det som fremheves eller ikke fremheves under arbeidet. Watson og Mason (1998) kategoriserer matematisk tenking i seks kategorier, og til hver av dem foreslår de spørsmål som vil engasjere elevene i de ulike typene mental aktivitet. Ved å bruke slike spørsmål bevisst i undervisningen, uansett hva slags oppgave klassen i utgangspunktet arbeider med, kan læreren legge til rette for at det stilles høye kognitive krav til elevene, og at de utvikler en helhetlig matematisk kompetanse.

Å eksemplifisere og spesialisere - Gi/vis/finn et eksempel på… - Er … et eksempel på ….? - Hva er det som gjør …. til et eksempel på …? - Finn et moteksempel til …	**Å komplettere og forbedre/videreutvikle** - Hva må tilføyes/endres/fjernes … for å sikre at …? - Hva er galt med …. ? - Hva kan tilføyes/fjernes/endres … uten at det har betydning for …?
Å sammenlikne, sortere og organisere - Hva er likt og hva er forskjellig ved …? - Sorter eller organiser … etter … - Er det eller er det ikke …	**Å endre, variere** - Hva er det som skjer hvis du endrer …? - Hva hvis (ikke) … - Hvis svaret på spørsmålet er … hva var så spørsmålet? - Løs/tegn/finn … på to eller flere måter – hva var den enkleste måten? Hvilken måte er det lettest å forstå?
Å generalisere og formulere formodninger - Hva er dette et eksempel på? - Hva skjer generelt? - Er det alltid/noen ganger/aldri tilfelle at ….? - Beskriv alle mulige… - Hva er det som kan endres og hva må være uendret for at …. fortsatt er sant?	**Å forklare, rettferdiggjøre, overbevise** - Forklar hvorfor … - Hvordan kan vi være sikre på at …? - Er det alltid sant at….? - Kan du forklare hvordan …. kan brukes til å …?

Tabell 1: Type matematisk tenking og tilhørende spørsmål (Watson & Mason, 1998)

Spørsmål av denne typen kan åpne for matematisk tenking og utvikling av elevers forståelse, men det er viktig at en lærer på forhånd forestiller seg hva som kan være mulige elevsvar, hvordan de ulike svarene kan kobles sammen og brukes i videre diskusjon. Videre er det viktig at læreren tenker gjennom hva som kan være matematisk gyldige begrunnelser for en gitt hypotese eller strategi, og hvordan læreren kan støtte elevene i deres resonnement.

Utfordringer og muligheter i oppgaver med høye kognitive krav i undervisningen

Selv om man har planlagt å arbeide med en flott oppgave med høye kognitive krav i undervisningen, kan det skje at arbeidet ikke går som planlagt. Smith m.fl. (2009) peker på at kognitive krav i oppgaver ofte blir redusert i selve undervisningen. Noen kritiske momenter som kan føre til reduserte kognitive krav:

- Læreren har ikke, eller klarer ikke å kommunisere tydelige faglige mål til elevene. Alle forslag er likestilt, aktiviteten går i alle retninger, men ikke i dybden på noe, og det faglige innholdet kobles i altfor liten grad til oppgaver og aktiviteter elevene har arbeidet med tidligere[3].
- Hvis elevene er vant til arbeid med oppgaver som går på memorering og prosedyrer som det ikke er nødvendig å forstå, og prøvene bare inneholder slike oppgaver, vil ikke elevene se på oppgaver med høye kognitive krav som viktige for matematikklæring.
- Forståelse og matematisk tenking krever utholdenhet av elevene. Løsningen er ikke åpenbar, man må prøve og feile flere ganger, prøve på ulike måter og selv vurdere om strategiene er holdbare.
- Oppgaver med høye kognitive krav er vanskelige og elevene ber gjerne læreren om hjelp. I et forsøk på å hjelpe elevene i gang, kan læreren begynne å forenkle spørsmålet. Av og til blir spørsmålet forenklet mer og mer, til det egentlig er blitt trivielt.[4] Oppgaven blir da redusert til gjøre det læreren sier eller reprodusere på en prosedyre man har lært før.
- Et moment som kan være et hinder i arbeid med oppgaver med høye kognitive krav er elevenes kompetanse i å utvikle strategier, argumentere, vurdere, osv. Oppgaven kan av og til vise seg til å kreve for mye. Elevene ikke har nok erfaring med nødvendige begreper, relasjoner eller type tenking som kreves.

Selv om arbeid med oppgaver med høye kognitive krav er krevende både for læreren og elevene, har vi ikke råd til å velge det bort. Variasjon er viktig både for matematikklæring og motivasjon. Hvis det bare blir arbeidet med oppgaver med lave kognitive krav, får ikke elevene mulighet til å erfare matematikk slik matematikken egentlig er; de lærer i beste fall en mengde fakta og regler. Diskusjon om matematiske ideer og sammenhenger, ulike strategier og prosedyrer, hypoteser, systematisk utforskning og argumentasjon er kjernen i matematikk. Og det er det som gjør det spennende å være matematikklærer og matematikkelev.

[3] Kazemi og Hertz (2014) diskuterer i sin bok hvordan man kan sette opp faglig mål og holde diskusjoner tett mot målet samtidig som man spiller på elevenes forslag og tenking.
[4] En slik forenking av spørsmålene kalles ofte for ”topaz-effekt”. Det kan leses mer om det i kapittel 7 i (Skott, Jess & Hansen, 2008) eller i Vesterdal (2011)

Referanser

Ahmad, A. (1987). Low Attainers in Mathematics Project. *Better Mathematisc*, HMSO, London.

Boaler, J. (1997). *Experiences School Mathematics: Teaching Styles, Sex and Setting*. Open University Press, Buckingham.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and understanding. *Journal for research in mathematics education*, *29*(1), s. 41-62.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny´s Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. *Journal of Children´s Mathematical Behavior 1*, 7-26

Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM standards. *Journal for Research in Mathematics Education* 30, 3-19.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A. M.-J., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., & Stigler, J. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries: Results From the TIMSS 1999 Video Study*. U.S. Department of Educational National Center for Education Statistics, Washington, DC.

Kazemi, E., & Hertz, A. (2014). *Intentional talk. How to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Skott, J., Jess, K., & Hansen, H. C. (2008). *Matematik for lærerstuderende: Delta: fagdidaktik.* Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3(5)*, 344–350

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development.* Teachers Collage Press. New York.

Stipek, D. J., Salmon, J. M., Givvin, K. B., & Kazemi, E. (1998). The Value (and Convergence) of Practices Suggested by Motivation Research and Promoted by Mathematics Education Reformers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(4), 465-488.

Valenta, A. (2016). *Oppgavestrenger i arbeid med tallforståelse*. Publisert på hjemmesiden til Matematikksenteret http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Innholdsside

Vesterdal, A. L. Ø. (2011). *Kommunikasjon mellom lærer og elever i et undersøkende og et tradisjonelt matematikklasserom.* Masteroppgaven er publisert på hjemmesiden til Matematikksenteret http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Innholdsside

Watson, A., & Mason, J. (1998). *Questions and Prompts for Mathematical Thinking*. ATM, Derby.

Watson, A. (2001). Lo watteiners exhibiting higher-order mathematical thinking. *Support for Learning* 16(4), 179-183.

Watson, A., & de Geest, E. (2005). Principled teaching for deep progress: Improving Mathematical learning beyond methods and materials. *Educational Studies in Mathematics* 58, 209-234