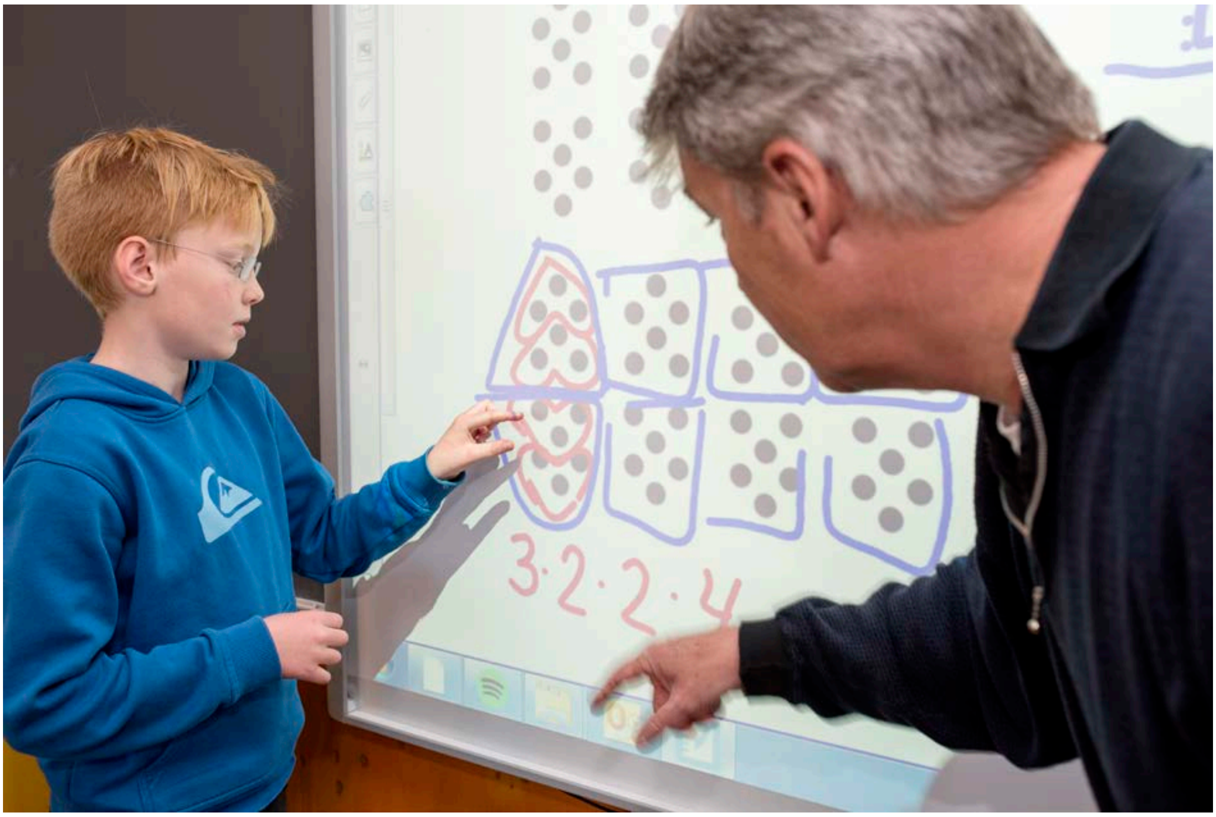
Barns strategier i arbeid med tall

Forfatter:

Olaug Ellen Lona Svingen

Publisert dato: Februar 2016



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

Vi kan observere små barns evne til å tenke matematisk når de møter praktiske situasjoner. Molly (4 år) deler 12 drops med tre venner ved å dele ut ett og ett drops til hver av vennene. Jonathan (5 år) bruker tellebrikker til å representere drops. Han skal løse oppgaven «Det var 7 drops i krukken. Hvor mange er igjen, når du har spist 3 av dem?» Jonathan teller 7 tellebrikker, tar vekk 3 av dem og teller tellebrikkene som er igjen, for å finne svaret. Hverken Molly eller Jonathan har lært divisjon eller subtraksjon, men de viser en forståelse av de praktiske situasjonene. Denne forståelsen kan de bygge videre på når de skal lære om addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999).

Små barn utvikler strategier for å løse matematiske problemer naturlig i sin hverdag. Barna kan konstruere løsninger til en mengde problemer uten formell undervisning i tallfakta, algoritmer eller prosedyrer. Når barna begynner på skolen, har de en uformell eller intuitiv kunnskap om matematikk som danner grunnlaget for deres videre utvikling av forståelse i matematikk (Carpenter et al., 1999). I et klasseromsmiljø som oppmuntrer barna til å bruke strategier som er meningsfulle for dem, vil barnet selv konstruere strategier som modellerer handlingen eller sammenhengen i et problem.

Å utvikle, bruke og samtale om strategier i arbeid med tall inngår i kompetansemål på alle trinn i LK06. I denne artikkelen vil jeg beskrive hvordan elever utvikler strategier for tallbehandling, og jeg vil presentere eksempler på strategier for tallbehandling innenfor addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Carpenter et al. (1999) beskriver elevers utvikling av strategier i arbeid med tall ved hjelp av strategiene: 1) direkte modellering, 2) tellestrategier og 3) tallfakta og fleksibel bruk av strategier.[1] I denne artikkelen gir jeg en nokså grundig beskrivelse av de tre strategiene som Carpenter og kolleger presenterer. Hovedfokuset vil være strategier som elevene bruker når de regner med flersifrede tall.

---

1 I sin forskning knyttet til elever med matematikkvansker, bruker Ostad (2013) begrepene backupstrategier og retrievalstrategier. Backupstrategier tilsvarer direkte modellering og tellestrategier, mens retrievalstrategier tilsvarer tallfakta og fleksibel bruk av strategier. Ostad (2013) bruker også begrepene strategifattigdom og strategirikdom, hvor yngre elever kjennetegnes ved strategifattigdom, mens eldre elever kjennetegnes ved strategirikdom. Videre beskriver Ostad (2013) fenomenet strategirigiditet og strategifleksibilitet, hvor et normalt utviklingsmønster kjennetegnes ved gradvis større effektivitet og fleksibilitet i strategibruk.

Barn er meningssøkende og bruker tilgjengelige strategier og hjelpemidler for å løse et problem. Deres strategier utvikler seg fra *direkte modellering* via mer abstrakte *tellestrategier* til tallfaktakunnskap og mer *fleksibel bruk av strategier*. Videre i artikkelen brukes begrepet *tallfakta* om tallfaktakunnskap, og det brukes om regnestykker man vet svaret på uten å tenke seg om, f.eks. 7 + 7 = 14, 4 + 6 = 10 og 4 · 6 = 24. Det er tradisjon i Norge for at elever lærer tallfakta både i addisjon og multiplikasjon i løpet av de første skoleårene. Det viser seg imidlertid at læring av tallfakta går over en lengre periode enn man tidligere trodde. Vi vet også at noen barn aldri vil lære disse tallfaktaene på et slikt nivå at de automatisk kan hente dem frem (Carpenter et al., 1999). Det er derfor viktig at barna utvikler strategirikdom og en fleksibilitet som bygger på forståelse av relasjoner mellom tall, støttet av tallforståelse og utviklet gjennom bruk av modeller og tellestrategier.

Målet er at elevene skal utvikle fleksible og hensiktsmessige strategier. Elevene i en gruppe vil være i ulike faser av sin utvikling av strategier. Vi kan se for oss et orienteringskart med poster fra start til mål. Elevene vil befinne seg på ulike poster til ulike tider på veien til målet. Lærerens oppgave blir å finne ut hvilken post eleven er ved og hvilken post eleven bør hjelpes mot. En av lærerens viktigste oppgaver blir å bygge videre på og utvide elevenes intuitive modelleringsferdigheter. Ved å ta utgangspunkt regnefortellinger, konkreter, tegninger, symboler eller modeller som for eksempel tallinje og rutenett (Valenta, 2015) og synliggjøre sammenhengen mellom ulike representasjoner, kan læreren hjelpe elevene fra konkret modellering til abstrakt modellering knyttet sammen med symbolspråket.

Direkte modellering

Ved direkte modellering bruker barna konkreter, de teller på fingrene sine eller de tegner for å modellere handlingen i oppgaven. La oss se på et eksempel som viser hvordan Kari tar i bruk direkte modellering for å løse en oppgave. «Randi har 4 lekebiler. En venn gir henne 7 lekebiler. Hvor mange lekebiler har Randi nå?» Kari løser oppgaven ved å bruke centikuber. Hun lager en mengde med 4 centikuber og en mengde med 7 centikuber. Hun slår sammen de to mengdene og teller «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11». Hun peker på en centikube for hver gang hun teller. Kari sier: «Hun har 11 lekebiler.» (Carpenter et al., 1999). Dette eksemplet illustrerer hvordan Kari gjengir handlingen i oppgaven med konkretene hun bruker. Hun lager de to mengdene hver for seg, slår dem sammen og teller deretter alle elementene.

Oppgaver kan ha ulik struktur avhengig av hva som er handlingen i oppgaven og hvilken relasjon det er mellom tallene.[2] Strukturen i oppgaven vil være avgjørende for hvordan elevene velger å modellere handlingen. Å slå sammen og å skille ut mengder er de enkleste strukturene å modellere. Disse strukturene beskriver en aktiv handling. En oppgave der elevene får oppgitt en endring og et resultat, er vanskeligere å modellere fordi startpunktet ikke er kjent. Dermed vil det ikke være like opplagt hvilken handling elevene skal modellere. Følgende eksempel illustrerer dette. Kari skal løse oppgaven «Randi hadde noen lekebiler. Hun fikk 5 lekebiler av en venn. Etterpå hadde hun 11 lekebiler. Hvor mange lekebiler hadde Randi til å begynne med?» Kari teller opp 3 centikuber. Hun legger til 5 centikuber og teller hvor mange hun har til sammen. Hun finner ut at hun har 8 og ikke 11. Hun starter på nytt. Nå teller hun opp 5 centikuber og legger til 5 til. Denne gangen ser hun at hun er bare én unna, så hun legger til 1 kube til den første mengden og legger til 5 til. Hun teller antall centikuber og finner ut at hun har 11. Kari teller den første mengden med 6 centikuber og svarer: «Hun hadde 6 lekebiler.» Vi ser at Kari gjetter og prøver for å finne svaret på oppgaven. Hun kan ikke automatisk legge til eller skille ut en mengde.

Eksempler på direkte modellering

Det er 27 elever i et klasserom og 24 elever i et annet klasserom. Hvor mange elever er det i begge klasserommene til sammen?

Handlingen i oppgaven er å finne summen av de to mengdene. Med direkte modellering vil elever lage en mengde med 27 og en med 24 elementer, slå sammen mengdene og deretter telle elementene. De modellerer de to mengdene som skal slås sammen, enten ved å telle ett og ett element eller gruppere i tiere og enere for deretter å telle begge mengdene.

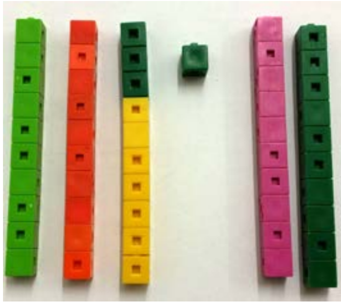
Anders løser oppgaven med å bruke centikuber. Han teller centikuber og lager en mengde med 27 centikuber og 24 centikuber. Han skyver sammen centikubene og teller dem, «1, 2, 3…48, 49, 50, 51».[3]

---

[2] Carpenter et al. (1999) identifiserer fire klasser oppgaver i addisjon og subtraksjon: endring, kombinere, sammenligne og gjøre likt.

[3] Eleveksemplene er inspirert av boken Children’s mathematics. Cognitively guided instruction (Carpenter, 1999) og er tilpasset norske forhold.

Marit bruker også centikuber. Hun legger 2 tierstaver og 7 kuber i en mengde og 2 tierstaver og 4 kuber i en annen mengde. Hun slår sammen mengdene og starter med å telle tierstavene. Deretter tenker hun seg litt om før hun organiserer de 11 centikubene i 1 tierstav og 1 ener.
Til slutt teller hun tierstavene og enerne.



Vi ser av de to eksemplene at elevene bruker centikubene på to ulike måter. Anders teller fortsatt én og én, mens Marit bruker tiere og enere. Å gå fra å telle ett og ett objekt til å bruke tiere og enere viser en kvalitativ endring i elevers tenking. På samme måte som i addisjon kan elevene lage mengder med bare enere eller med tiere og enere når de skal modellere subtraksjon, multiplikasjon eller divisjon. Følgende oppgave er et eksempel på modellering i multiplikasjon.

En skole kjøpte seks esker med 12 tusjer i hver eske. Hvor mange tusjer kjøpte de til sammen?

Kaia lager 6 mengder med 12 centikuber i hver mengde og teller én og én kube. Maja derimot lager 6 mengder med centikuber, men organiserer hver mengde i 1 tier og 2 enere. Når hun teller antall elementer, teller hun tiere, slår sammen enere til tiere og teller enere hun har til overs.

Lærerens viktigste oppgave er å hjelpe elevene videre i sin utvikling. Læreren kan legge til rette for bruk av ulike konkreter eller representasjoner som kan støtte elevens tenking. I eksemplene over bruker elevene centikuber som de kan lage tierstaver med. Base 10-materiell, mynter, tallinja eller hundrerutenett er eksempler på andre mulige representasjoner.

Tellestrategier

Tellestrategier er mer effektive og abstrakte strategier enn direkte modellering. Vi ser på Jens som løser oppgaven «Randi har 4 lekebiler. En venn ga henne 7 lekebiler. Hvor mange lekebiler har Randi nå?» Jens teller «4 (pause), 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Hun har 11 biler.» Mens Jens teller, strekker han ut en finger for hver gang han teller. Når han har strukket ut sju fingre, stopper han tellingen og sier svaret. Jens bruker fingrene til å holde orden på tellingen (Carpenter et al., 1999).

Når elever tar i bruk tellestrategier, har de funnet ut at de ikke trenger å lage og telle mengdene som er beskrevet i en oppgave. De har utviklet en forståelse av tall som et abstrakt begrep.

Det er likevel verdt å merke seg at elevene kan ha behov for å bruke en eller annen form for objekter for å holde orden på tellingen, det kan være fingrene, tellebrikker eller tellestreker. De gjennomfører telling på to plan, å telle videre og å holde orden på hvor mange de har telt. Mange elever bruker fingrene til støtte når de teller. Et viktig skille mellom å telle på fingrene som direkte modellering og tellestrategi, er om elevene modellerer mengden med fingrene for deretter å telle, eller om fingrene brukes til støtte for tellingen.

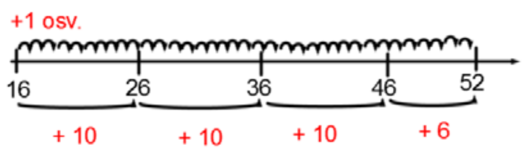
Hos elever som bruker tellestrategier, er det to tegn læreren kan se etter for å vurdere hvor effektiv tellestrategien er. Det første er om elevene bevisst velger å starte å telle fra det største tallet. Det andre er om elevene teller med tiere og enere i stedet for å telle én og én.

Eksempler på tellestrategier

Det er 52 passasjerer på bussen. 16 passasjerer går av. Hvor mange er igjen på bussen?

Berit starter på 16 og teller videre «17, 18, 19… 49, 50, 51 og 52,» samtidig som hun tegner tellestreker for hvert tall hun teller. Når hun har kommet til 52, teller hun antall tellestreker. Arne teller «16, 26, 36, 46, 47, 48, 49, 50, 51 og 52.» For hver tier han teller, løfter han en finger på høyre hånd, deretter en finger på venstre hånd for hver ener han teller. 3 tiere og 6 enere, 36.

Både Berit og Arne velger å telle fra det minste tallet. Mange elever velger å tenke på denne måten, mens det mest vanlige ville vært og skrevet regnestykket som en subtraksjon. En lærer ville beskrevet deres strategi symbolsk som 52 – 16 = 36. Denne skrivemåten er egentlig



ikke i samsvar med hvordan elevene modellerer oppgaven. En skrivemåte som samsvarer mer med strategien elevene bruker, er å skrive 16 + __ = 52. Elevenes tenking og strategien de bruker, kan også representeres på en tallinje.

Tellestrategier i multiplikasjon og divisjon kjennetegnes ved at elevene ramser opp en tallserie de har lært ved multiplikasjon. De kan for eksempel telle i steg med 3 og telle 3, 6, 9, 12 osv., samtidig som de bruker fingrene til å holde orden på hvor mange grupper de har telt. Legg merke til at de teller antall objekter i gruppen, som i vårt tilfelle er 3. Dersom de ikke er sikre på alle tallene i tallserien, kan de bruke en kombinasjon av å telle én og én og tallserie. Et eksempel på dette kan være at en elev teller 4, 8, 12, 13, 14, 15 og16. Noen elever kan også bruke addisjonsstrategier for å løse oppgaver med multiplikasjon og divisjon.

En restaurant legger 4 osteskiver på hvert smørbrød. Hvor mange smørbrød kan de lage når de har 24 osteskiver?

Susanne teller: «Hmmmm, 4, 8, 12, 16, 20, 24.» For hver gang hun teller, strekker hun ut en finger. Når hun er ferdig med å telle, ser hun på de 6 fingrene hun har strukket ut og sier «6. De kan lage 6 smørbrød.» Susanne teller i steg med 4. Hun holder orden på tellingen ved å bruke fingrene og stopper å telle når hun kommer til 24. Denne tellestrategien fungerer godt for målingsdivisjon, som eksemplet over illustrerer. Å bruke samme strategi for delingsdivisjon byr på større problemer, da elevene ikke vet størrelsen på gruppen de skal telle. De må da prøve seg frem, slik som Susanne gjør i dette eksemplet:

Det er 24 elever i klassen. Klassen skal deles i 6 lag med like mange elever i hvert lag. Hvor mange elever vil det bli på hvert lag?

Susanne teller: «Skal vi se, 3, 6, 9, 12, 15, 18.» Hun strekker en finger i været for hver telling. Når hun har strukket 6 fingre i været, stopper hun opp. «Nei, det ble ikke mange nok. Jeg prøver 4. 4, 8, 12, 16, 20, 24.» Igjen strekker Susan en finger i været hver gang hun teller. Hun stopper på 24 og ser at hun har strukket 6 fingre i været. «Det er det. Det blir 4 i hver gruppe.» Siden hun ikke visste hvor mange det skulle være i hver gruppe, måtte hun prøve seg frem.

Fleksibel bruk av strategier

For strategiene direkte modellering og tellestrategier vil handlingen i en oppgave ha betydning for hvor vanskelig oppgaven er. Etter hvert ser elevene at de kan løse oppgaven uten å modellere handlingen i oppgaven, og de blir mer fleksible i sine valg av strategier. Elevene vil se sammenhengen mellom delene og helheten i addisjon og subtraksjon. Det innebærer at de ikke trenger å tenke på handlingen, men heller se på sammenhengen mellom delmengde og hel mengde. De utvikler også en forståelse av at når man slår sammen to mengder, kan disse skilles ut fra helheten igjen. De utvikler altså en forståelse for at en handling er reversibel.

Gary hadde 73 kr. Han kjøpte en lekeslange som kostet 55 kr.
Hvor mange kroner hadde Gary igjen?

Linda sier «70 minus 50, det er 20. Så tar jeg 5 fra 3. Hmmmm, det er 2, så jeg må ta de 2 fra 20. Det er 18.» Andy sier: «Vel, 55 og 10 til er 65 og 5 til er 70 og 3 til er 73. Så jeg hadde 10 og 5 og 3, det er 18.» (Carpenter et al., 1999) Her ser vi to eksempler på elever som har utviklet egne strategier, og de forklarer strategiene sine med egne ord.

Erfaringene elevene gjør seg knyttet til de fire regneartene, gjør at de utvikler mer effektive og hensiktsmessige strategier, som eksemplet over viser. Elevene bygger på tallfaktakunnskap de har og bruker strategiene fleksibelt. De utvikler effektive hoderegningsstrategier.

Elevene lærer noen tallfakta før andre tallfakta. De lærer for eksempel dobling (f.eks. 4 + 4 = 8, 7 + 7 = 14) før andre tallfakta. De lærer seg også tiervennene ganske tidlig (f.eks. 7 + 3, 4 + 6). Disse tallfaktaene bruker de videre til å utlede svar på andre tallkombinasjoner. De bruker for eksempel dobling når de regner: 7 + 8 = 7 + 7 +1, eller de bruker tiervenner: 8 + 4 = 8 + 2 + 2. Det å utlede et svar med utgangspunkt i kjente tallfakta forutsetter at eleven har en forståelse av relasjonen mellom tall. Studier viser at mange barn bruker strategier der de utleder svar fra kjente tallfakta, selv om de ikke kan alle tallfakta i den store addisjonstabellen. Når elever får mulighet til å forklare sine strategier og lytte til andre elevers strategier, vil de i større grad utlede svar fra kjente tallfakta og på sikt lære flere tallfakta (Carpenter et al., 1999).

Et viktig grunnlag for å utvikle fleksibilitet i bruk av strategier er å få en forståelse for at tall kan representeres på ulike måter. Tallet 43 kan ses på som 40 + 3, 30 + 13, 21+ 22 osv. Denne fleksibiliteten gjør det enklere for elevene å velge hensiktsmessige strategier når de skal løse en oppgave.

Jeg vil presentere eksempler knyttet til de fire regneartene som viser hvordan elevenes strategier kan komme til syne i klasserommet og hvilke representasjoner som kan støtte de ulike strategiene. Jeg har valgt ut fire ulike strategier i addisjon og subtraksjon og tre strategier i multiplikasjon og divisjon. Eksemplene illustrerer også mulige tenkemåter bak strategiene, men det er viktig å påpeke at man kan finne flere variasjoner av disse i klasserommet.

Addisjon

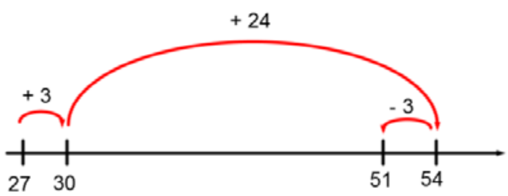
Det er 27 elever i et klasserom og 24 elever i et annet klasserom. Hvor mange elever er det i begge klasserommene til sammen?

<u>Kombinere enere og tiere.</u> Elevene utvikler etter hvert god forståelse for posisjonssystemet og vil utnytte dette når de regner. Vi kan tenke oss følgende forklaring fra en elev: «2 tiere pluss 2 tiere er 40, 7 pluss 4 er 11. 40 og 11 er 51.» Elever som har jobbet mye med tierstaver og kuber, vil etter hvert kunne se for seg disse i hodet mens de regner, og dermed blir erfaringene med direkte modellering et verktøy for tenkingen.

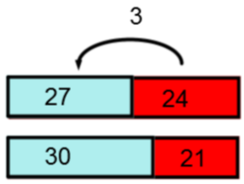
<u>Trinnvis økning.</u> I denne strategien deler elevene opp det siste tallet i tiere og enere og regner videre fra det første eller det største tallet. Elever som har brukt hundrerutenettet, kan tenkes å forklare denne strategien med utgangspunkt i hvordan de beveger seg i hundrerutenett: «Jeg flytter to rader ned i hundrerutenettet fra 27 til 47, deretter er det 3 til 50 og en til, 51.»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

<u>Kompensere.</u> Å regne med hele tiere er enklere enn tall som er sammensatt av tiere og enere. Dette kan elever utnytte på ulike måter.



I dette tilfellet kan man tenke seg at en elev starter å regne fra 30 og legger til 24 som er 54. Men siden man startet med et tall som var 3 større enn 27, må man trekke fra 3 og får 51. Dette kan illustreres på tallinja.



Opprettholde lik verdi. Når elevene har utviklet forståelse for sammenhengen mellom delmengde og hel mengde, og at en mengde kan deles i ulike delmengder uten å endre hele mengden, vil de kunne utnytte dette til å regne med tall som er enklere å håndtere i hoderegning. Det kan forklares på følgende måte: «Jeg flytter 3 fra 24 til 27 og får 30 pluss 21 som blir 51.» En barmodell kan illustrere dette.

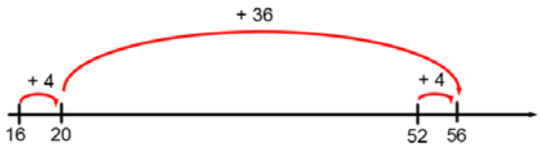
Subtraksjon

Det er 52 passasjerer på bussen. 16 passasjerer går av. Hvor mange er igjen på bussen?

Tiere og enere. Denne strategien utnytter det elevene kan om posisjonssystemet. Eleven kan se for seg fem tierstaver og to kuber. «Jeg tar bort 1 tier. Da har jeg 4 tiere og 2 enere. Så tar jeg bort 2 enere, men jeg må ta bort 4 til. 40 minus 4 er 36.»

Trinnvis endring. Når man bruker denne strategien deler man opp leddet bak minustegnet i tiere og enere og trekker fra tierne først og deretter enerne. «Jeg tar 52 minus 10 som blir 42. 42 minus 6 blir 36.» Elever kan tenke 42 minus 6 på ulike måter. Med utgangspunkt i tallfaktakunnskap kan de tenke 6 + 6 = 12, da må 12 – 6 bli 6, og et antall tiere og 2 enere må bli en tier mindre og seks enere. De kan også tenke 42 minus 2 er 40, og 40 minus 4 er 36.

Kompensere. I subtraksjon er det enklere å regne med hel tier i leddet bak minustegnet. Man utnytter dette ved å kompensere på følgende måte: «52 minus 20 er 32, da har jeg tatt bort fire flere enn jeg trenger og legger 4 til 32 og får 36.»

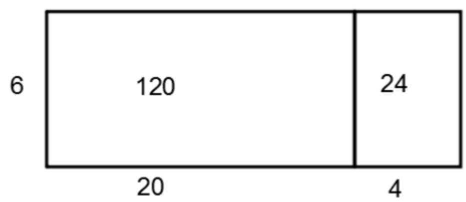


Konstant differanse. Denne strategien bygger på at en differanse mellom to tall ikke endres når man flytter like mange i samme retning. Tallinja kan illustrere dette. I dette eksemplet flytter man 4 til høyre fra 16 til 20, og da må man også flytte 4 til høyre fra 52 til 56. Vi ser at 52 – 16 = 56 – 20. Det siste regnestykket er enklere å regne ut enn det første.

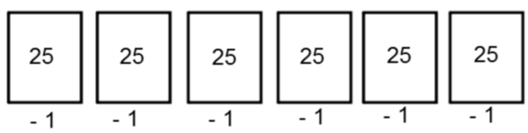
Multiplikasjon

I mange klasserom er det stort fokus på den lille multiplikasjonstabellen. Det er liten tvil om at automatisering av den gjør det enklere å arbeide med multiplikasjon og divisjon med større tall. Veien mot å automatisere multiplikasjonstabellen vil ta lang tid for mange elever, og noen elever vil kanskje aldri lære alle gangetabellene. En god hjelp på veien for å løse problemer med multiplikasjon vil være å bruke tallfakta som de allerede kan. Strategier som dobling, det vil si dobling for tall i 4-gangen, 5-gangen som halvparten av 10-gangen, 6-gangen som en gang mer enn 5-gangen og 9-gangen som en gang mindre enn 10-gangen, er strategier som kan gjøre eleven i stand til å regne mer effektivt. Elever som aktivt tar i bruk slike strategier og diskuterer disse med sine medelever, vil mest sannsynlig også lære flere tallfakta i multiplikasjonstabellen. Strategiene gir dem også en større fleksibilitet når de regner med større tall.

En skole kjøpte seks esker med 24 tusjer i hver eske. Hvor mange tusjer kjøpte de til sammen?

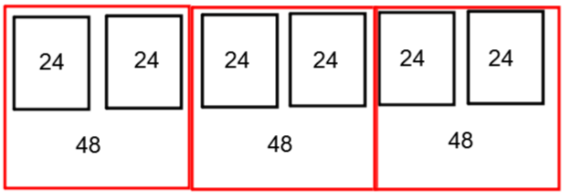


Delprodukt, tiere og enere. Denne strategien bygger på den distributive lov: (a ± b) · c = (a · c) ± (b · c). Å regne med 10-gangen og hele tiere lærer elever tidlig. Strategien bygger videre på elevers erfaring med å gruppere tiere og enere, som de kanskje har gjort med direkte modellering. De utvikler dette videre ved å gjøre disse prosessene i hodet. «Jeg regner 20 ganger 6 som er 120 pluss 4 ganger 6 som er 24. 120 pluss 24 er 144.» Denne prosessen kan illustreres med et åpent rutenett og med symbolspråk ser det slik ut: (20 + 4) · 6 = (20 · 6) + (4 · 6).



Kompensere. Her tar man utgangspunkt i tall som er enklere å regne med enn de som er i oppgaven. I dette eksemplet kan man ta utgangspunkt i 6 · 25. «Jeg tenker 6 esker med 25 tusjer i hver. Det er 50 + 50 + 50, som er 150 tusjer. Men det er en tusj for mye i hver av eskene. Jeg tar derfor ut en tusj fra hver eske, til sammen 6 tusjer. Da har jeg 150 – 6, som er 144 tusjer.» Man tar utgangspunkt i at 6 · 24 = 6 · (25 – 1) = (6 · 25) – (6 · 1).

Dobling og halvering. Dobling er noe mange elever er flinke til. Dette kan elevene utnytte når de regner med store tall. Det kan også være fornuftig å se på sammenhengen mellom faktorene og produktet. Når den ene faktoren dobles, halveres den andre. «Jeg dobler 24 og får 48. 48 tre ganger blir: 48, 96, 144.» Illustrasjonen viser sammenhengen mellom 6 · 24 = 3 · 48.



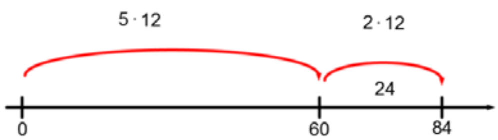
Divisjon

Siden divisjon er motsatt regneoperasjon av multiplikasjon, vil kunnskap om multiplikasjonstabellene være til hjelp når vi dividerer.

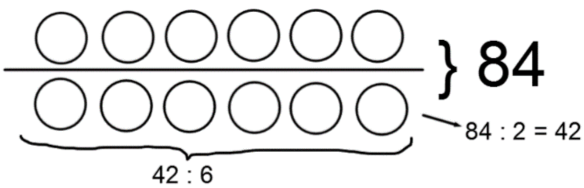
En klasse bakte 84 kjeks. De pakket kjeksene i bokser med 12 kjeks i hver boks. Hvor mange bokser kunne de fylle?

Deler dividenden i kjente deler. Her tar man utgangspunkt i tallfakta og jobber videre ut i fra disse. I stedet for å tenke divisjon, tenker man hvor mange ganger tallet (divisor) går opp i dividenden. «12 går 5 ganger i 60, da er det 24 igjen. 12 går to ganger i 24. 5 og 2 er 7.» Vi ser igjen at den distributive lov hjelper eleven til å finne svaret. Tallinja kan illustrere dette. (5 · 12) + (2 · 12) = 7 · 12. Da er 84 : 12 = 7.

Multiplisere opp. Denne strategien kan ligne litt på å dele dividenden i kjente deler, men har mer fokus på multiplikasjon. «Hva må jeg multiplisere 12 med for å få 84. Jeg vet at 5 ganger 12 er 60. Da er det 24 igjen. 2 ganger 12 er 24. 5 og 2 blir 7.» Her som i den forrige strategien tar eleven utgangspunkt i kjente tallfakta.



Opprettholde lik verdi. Denne strategien bygger på en forståelse av divisjon som brøk og likeverdige brøker. Ved å dividere eller multiplisere brøken med 1 endres ikke verdien til tallet, men ved å representere 1 på en smart måte kan man gjøre tallene



enklere. Det er enklere å fremme en forståelse av denne strategien ved å bruke delingsdivisjon. Vi tenker oss at vi endrer problemstillingen til følgende: *En klasse bakte 84 kjeks. De deler kjeksene likt i 12 bokser. Hvor mange kjeks blir det i hver boks?* Illustrasjonen viser hvordan vi kan synliggjøre at når vi halverer antall bokser, må vi også halvere antall kjeks for å få samme antall kjeks i hver boks.

En oversikt over «Utvikling av barns strategier for tallfakta» og «Strategier for tallbehandling av flersifrede tall» finnes på slutten av artikkelen.

Oppsummering

Valenta (2015) beskriver fem komponenter ved tallforståelse med utgangspunkt i Kilpatrick, Swafford, and Findell (2001) sin trådmodell. De fem komponentene er begrepsforståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. Utvikling av fleksible strategier kan knyttes til alle de fem komponentene, og det understreker betydningen av at elever gis mulighet til å utvikle fleksible strategier med utgangspunkt i egen forståelse og eget språk.

Å utvikle fleksible strategier forutsetter at elevene kan representere tall på ulike måter, kjenne til og utnytte egenskaper ved tall, bruke relasjoner mellom tall, representere regneoperasjoner på ulike måter og kjenne til grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner. Alle disse punktene inngår i komponenten *begrepsforståelse*. Elevers bruk av strategier er tett forbundet med deres begrepsforståelse, og de påvirker hverandre. En god begrepsforståelse kan bidra til mer fleksibel bruk av strategier, og motsatt, en fleksibel bruk av strategier kan føre til bedre begrepsforståelse. Når læreren presenterer algoritmer for elevene, kan elevenes fokus flyttes fra å forstå til å huske prosedyrer (Kamii & Dominick, 1998). Kamii and Dominick (1998) fremhever to årsaker til at fokus på algoritmer i undervisningen hindrer elevenes utvikling av tallforståelse: 1) de avlærer plassverdisystemet og hindrer elever i å utvikle tallforståelse, og 2) de tvinger elevene til gi opp sin egen tenking.

Beregning handler om å utvikle og bruke varierte strategier, velge hensiktsmessig strategi for et gitt regnestykke og regne effektivt og nøyaktig. Standardalgoritmene i matematikk er utviklet over flere hundreår og er effektive regnemåter, men det er ikke alltid lett for elevene å se tanken bak og forstå algoritmen. Bruk av fleksible strategier som bygger på elevenes forståelse av tall og titallssystemet, blir ikke meningsløse prosedyrer. Elevene utvikler en forståelse for algoritmene og prosedyrene de bruker, og man kan unngå at elever utvikler varige misoppfatninger i matematikk. Ved å utvikle fleksibilitet i bruk av strategier kan elevene også unngå å gjøre regnefeil som har sammenheng med at de ikke husker alle trinnene i standardalgoritmene. Noen av barnas strategier kan synes tidkrevende og omfattende, men etter hvert som elevenes strategier utvikles, vil mange utvikle strategier som er mer effektive enn standardalgoritmen.

Viktige momenter i elevers fleksible bruk av strategier er å se sammenhenger mellom ulike representasjoner, utvikle nye løsningsstrategier og vurdere hvor rimelig et svar er. Disse momentene beskriver komponenten *anvendelse*. Andre viktige momenter er å forklare hvordan man tenker, se etter mønster og systemer, utforme hypoteser og begrunne sammenhenger mellom ulike begreper, egenskaper og fremgangsmåter. Dette er momenter som er knyttet til *resonnering*. *Engasjement* handler om å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt. Når elevene får lov til å utvikle og bruke egne strategier i arbeidet med tall, kan de oppleve matematikk som meningsfullt. De kan se det som nyttig å bruke ulike representasjoner i arbeidet med tall, og de kan se verdien av å utvikle flere fremgangsmåter for samme type problemer. Elevers bruk av strategier vil derfor berøre alle de fem komponentene ved tallforståelse.

Læreren har en viktig rolle i å velge oppgaver som inviterer til bruk av strategier, og bruke representasjoner som fremmer utvikling og forståelse i matematikk. Læreren leder elevene mot læringsmålet for timen og legger opp til diskusjoner hvor elevene kan sammenligne ulike strategier, diskutere når en strategi kan være fornuftig å bruke og begrunne hvorfor strategien fungerer. Læreren kan presentere ulike representasjoner som kan hjelpe elevene videre i deres utvikling av strategier, og feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. Læreren lytter til elevenes argumentasjon, orienterer dem mot hverandres tenking og knytter sammen begreper, representasjoner og modeller.

Når elevene forklarer sine strategier, vil læreren få bedre innsikt i elevens tallforståelse. Elevene vil bruke sine ord og sin forståelse. Det kan hjelpe læreren til bedre å forstå hvordan han kan hjelpe denne eleven videre, hvilke representasjoner som kan være nyttige for denne eleven og hvilke strategier som er neste post for denne eleven på veien mot en fleksibel bruk av strategier.

It is only when ***you build from within*** *that you* ***really understand*** *something. If children don't build from within and you just try to explain it to a child then it's not really learned. It is* ***only route****, and that's not really understand.*
Ann Badeau, second-grade teacher (Carpenter et al., 1999)

Referanser

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction* (L. Peake Ed.). Portsmouth, NH: Heinemann.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 19*, 130-140.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. *Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Washington, DC: National Academy Press*.

Ostad, S. A. (2013). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring : med fokus på elever med matematikkvansker* (2. oppl. [i.e. rev.utg.]. ed.). Trondheim: Læreboka forl.

Valenta, A. (2015, 17.12.2015). Aspekter ved tallforståelse. Retrieved from http://matematikksenteret.no/content/4791/Artikler

Utvikling av barns strategier for tallfakta

Oppgave	Direkte modellering	Telling	Avledet tallfakta	Tallfakta
5 + 7 = ? Slå sammen mengder. Resultat ukjent	Lager en mengde med 5 tellebrikker og en mengde med 7 tellebrikker. Slår sammen mengdene og teller alle tellebrikkene.	Teller «5 (pause), 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,», strekker ut en finger for hver telling. «Svaret er 12.» Kan også begynne å telle fra 7.	«Tar 1 fra 7 og gir den til 5. Da blir det 6 + 6, og det er 12.»	5 pluss 7 er 12
12 – 5 = ? Skille ut mengde. Resultat ukjent	Lager en mengde med 12 tellebrikker og skiller ut 5 av dem. Teller tellebrikkene som er igjen.	Teller bakover «12, 11, 10, 9, 8 (pause), 7. Det er 7.» Bruker fingrene til å holde orden på antall steg i tellesekvensen.	«12 minus 2 er 10, minus 3 til er 7.»	12 minus 5 er 7.
4 + ? = 11 Slå sammen mengder. Endring ukjent.	Lager en mengde med 4 tellebrikker. Lager en ny mengde med tellebrikker og teller «5, 6, 7, 8, 9, 10, 11» til det totale antallet er 11. Teller de 7 tellebrikkene i den andre mengden.	Teller «4 (pause), 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.» Strekker ut en finger for hver telling. Teller de 7 utstrakte fingrene. «Det er 7.»	«4 + 6 er 10 og en til er 11, så det er 7.»	4 og 7 blir 11
5 · 7 =	Lager 7 mengder med 5 tellebrikker og teller alle.	5, 10, 15, 20, 25, 30, 35	5 ganger 5 er 25 og 10 til er 35.	5 ganger 7 er 35
56 : 8 =	Teller opp 56 tellebrikker. Trekker ut grupper med 8 til det er 7 mengder.	8, 16, 24, 32, 40, 48, 56	8 ganger 8 er 64. 8 mindre er 56, så det er 56.	8 · 7 er 56

Strategier for tallbehandling av flersifrede tall

Oppgave	Direkte modellering		Telling		Bruk av fleksible strategier
	Med enere	**Med tiere**	**Med enere**	**Med tiere**	
25 + 17 = ?	Lager en mengde med 25 elementer og en mengde med 17 elementer. Teller alle elementene.	Lager en mengde med 25 og en mengde med 17 ved å bruke tiere og enere. Teller dem alle.	Starter med 25, teller videre en og en, holder orden på hvor mange man har lagt til, helt til det totale antallet er nådd.	Starter med 25, teller videre med ti og deretter enere. 25, 35, 36, 37…. 42	Kombinerer enere og tiere: 20 og 10 er 30, 5 og 7 er 12. 30 og 12 er 42 Trinnvis økning: 25 + 10 = 35 og 7 til er 42 Kompensere: 25 og 20 er 45, 3 mindre er 42. Opprettholde lik verdi: 25 + 17 = 22 + 20
47 – 28 = ?	Lager en mengde med 47 elementer og tar bort 28 elementer. Teller de som er igjen	Lager en mengde med 47 ved å bruke tiere og enere. Tar bort 28. Teller de som er igjen	Teller baklengs fra 47 en og en, eller teller en og en videre fra 28 til 47. Holder orden på hvor mange man har talt.	Teller baklengs fra 47 med tiere og enere eller teller fra 28 med tiere og enere.	Tiere/ener: 40 minus 20 er 20. 7 minus 8 er -1. 20 minus 1 er 19 Trinnvis endring: 47 minus 20 er 27. 27 minus 8 er 19 Kompensere: 47 minus 30 er 17, pluss 2 er 19. Konstant differanse: 47 – 28 = 50 – 31 = 19
12 · 15 = ?	Lager en mengde med 12 enere og repeterer denne mengden 15 ganger. Teller alt.	Lager mengder med 12 med tiere og enere og repeterer denne mengden 15 ganger. Teller alt.	Teller i steg 12, 24, 36, 48 … 180 eller adderer 12, 15 ganger og tenker ut ulike måter man kan addere listen.		Delprodukt, tiere og enere: 12 ganger 10 er 120. 12 ganger 5 er 60. 120 og 60 er 180 Kompensere: 12 · 20 = 240; 240 – (12 · 5) = 180 Dobling og halvering: 15 · 6 = 90. Dobler og får 180
120 : 15	Lager en mengde med 120 elementer. Trekker ut grupper på 15 og teller hvor mange grupper man har laget, og hvor mange som er igjen.	Lager en mengde med 120 ved å bruke tiere og enere. Trekker ut grupper på 15 og teller hvor mange grupper man har laget, og hvor mange som er igjen.	Teller i steg 15, 30, 46, 60, 75, 90, 105, 120 eller adderer 15 inntil man kommer til 120 eller nært opptil 120		Deler dividend i kjente deler: 15 går 7 ganger i 105 og 15 til er 120. Det er 8. Multiplisere opp: 15 ganger 4 er 60. 60 ganger 2 er 120. Det er 8. Opprettholde lik verdi: 120 : 15 = 40 : 5 = 8