



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Hva kjennetegner god matematikkundervisning?

Sammen om oppdraget!

Gardermoen Airport hotel, 15. november 2017

Astrid Bondø, NSMO

Hvem skal ut?

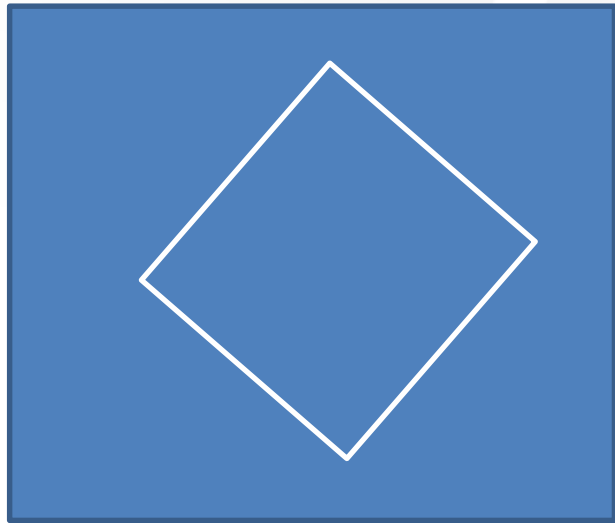
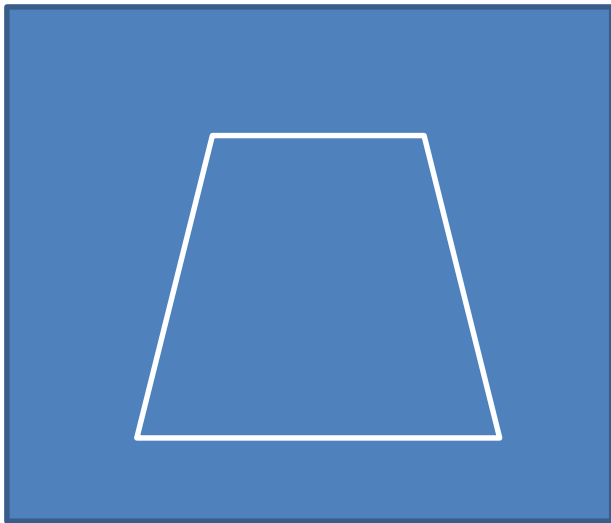
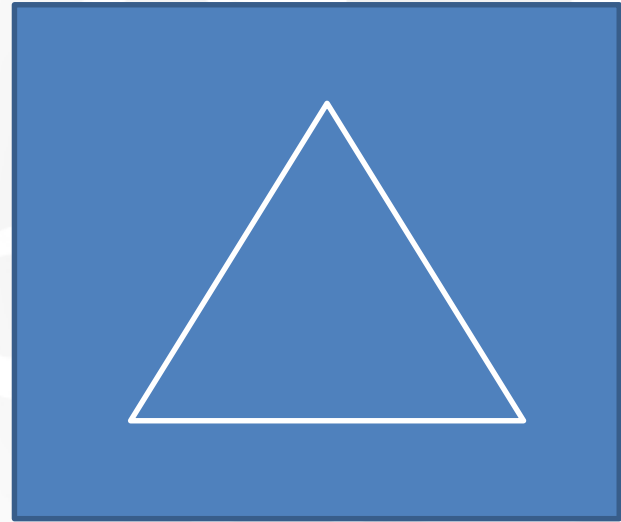
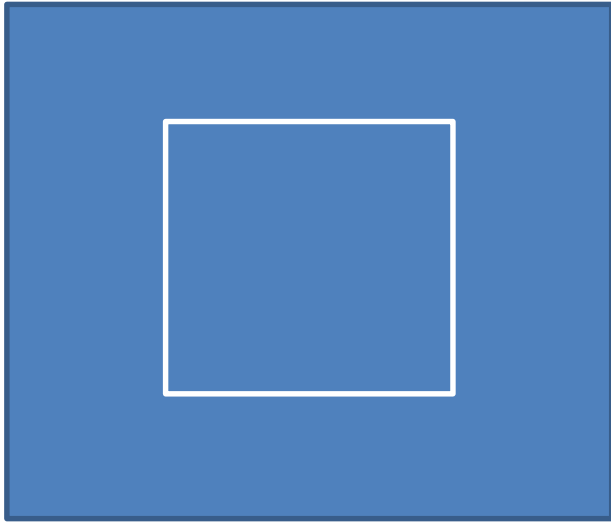


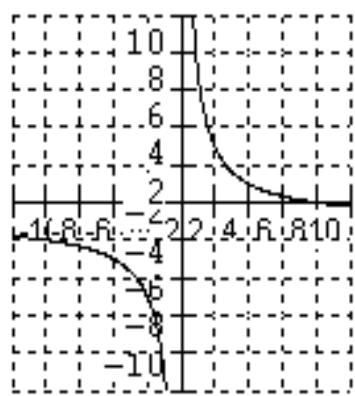
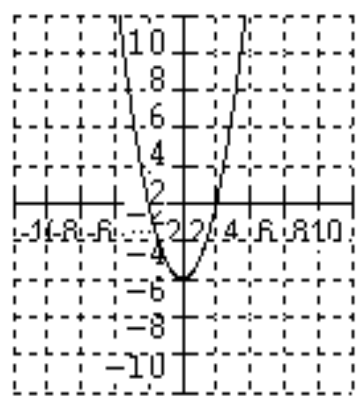
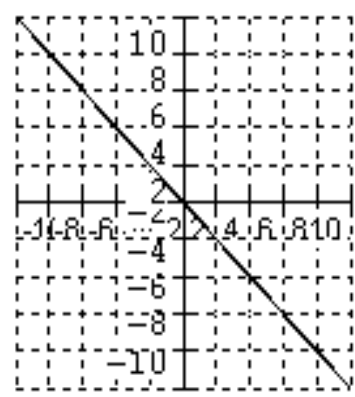
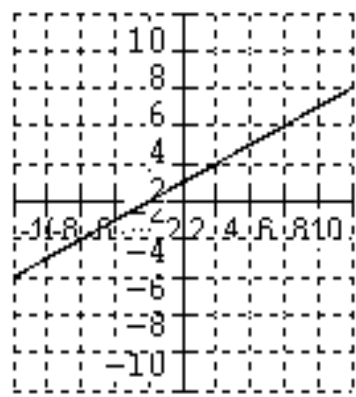
pen

pil

ku

penn





Hvem skal ut?

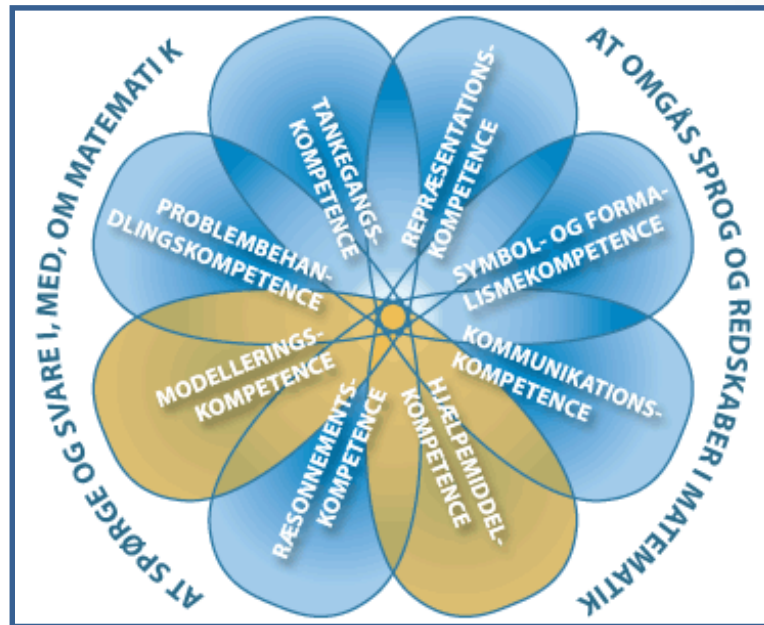
Hva kan være felles for denne oppgaven til tross for ulike tema (dyr, språk, matematikk)?

- Ikke fasitsvar
- Se likheter og ulikheter
- Se mønster og sammenhenger
- Forklare og argumentere
- Lytt til andre og stille spørsmål

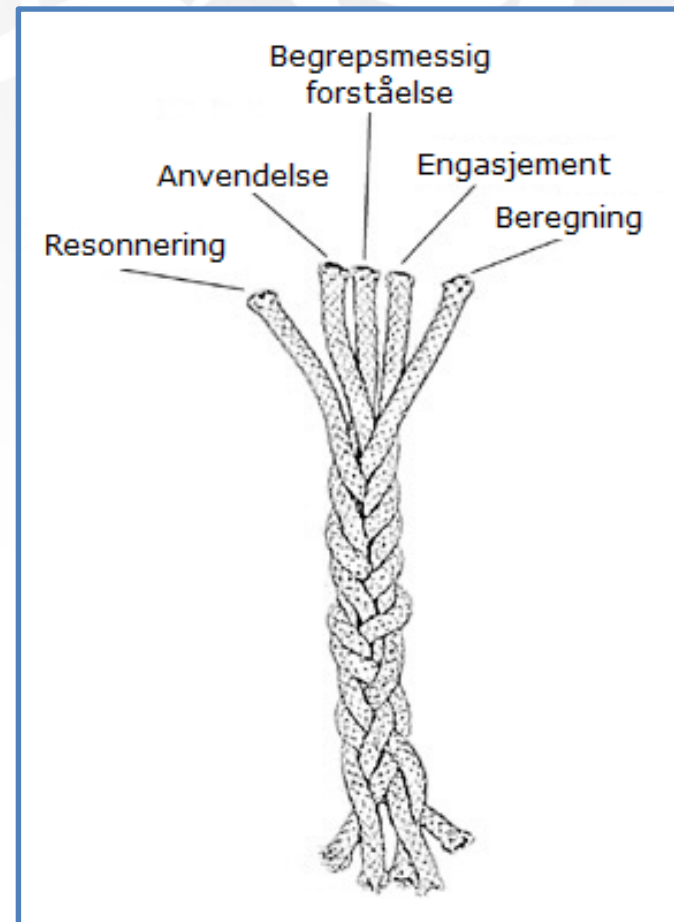
- Handler dette om matematikk?

Matematisk kompetanse

Niss



Kilpatric



Matematisk kompetanse

Begrepsmessig forståelse: Begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner

Instrumentell – relasjonell

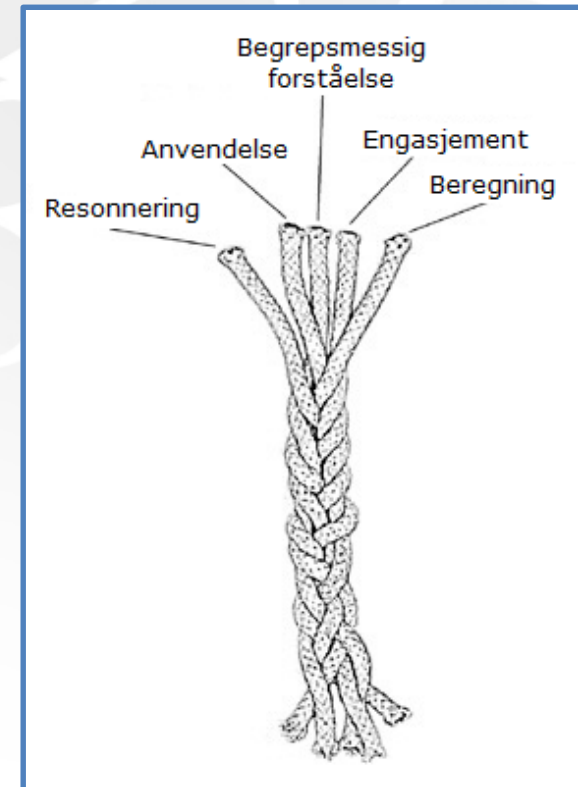
Beregning: Utføre prosedyrer effektivt, nøyaktig og **fleksibelt**.

Anvendelse: Formulere problemer matematisk – **utvikle strategier** for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer.

Gjelder både i «ren» og «anvendt» matematikk

Resonnering: Forklare og **begrunne**, utvide fra det kjente til det ukjente.

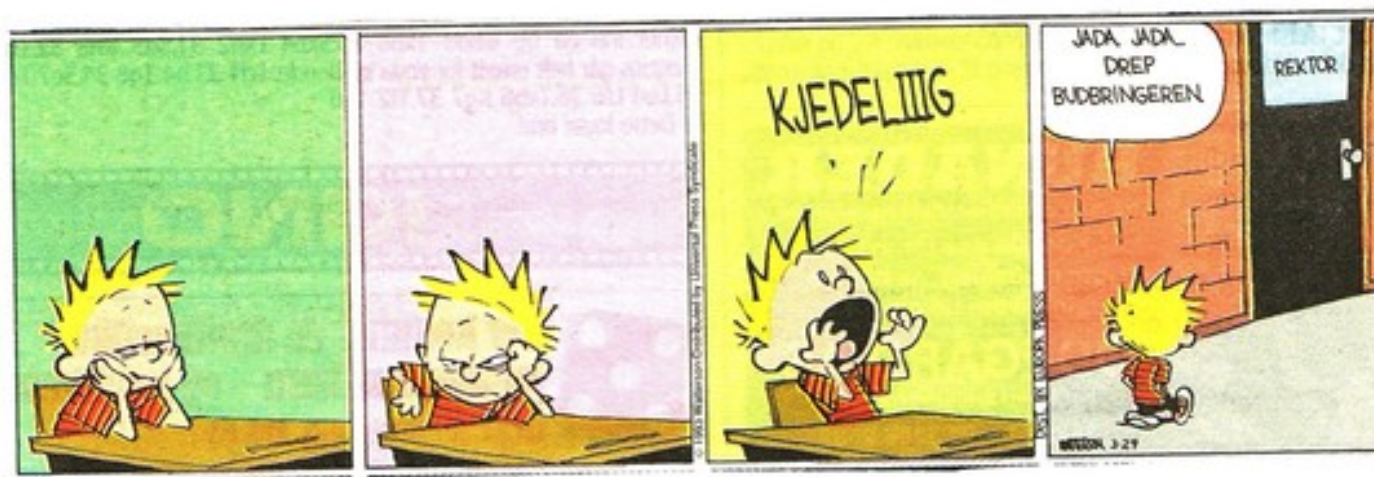
Engasjement: Motivasjon, matematikk nyttig og verdifullt. Tro at innsats gir økt læring.



Trådmodellen. Kilpatrick et al.

Meningsløst og kjedelig når

- eleven ikke mestrer – og ikke får hjelp
- eleven ikke får nok utfordringer
- arbeidet blir monotont, rutinepreget



Fra lavfunksjonell til høyfunksjonell opplæring for elever som strever

Spesialundervisning

- Lave faglige og sosiale forventninger
- Lavt læringstrykk
- Mye instrumentell læring
- Spesialundervisning som saldering
- Mest segregert
- PPT er sakkyndig

Høye faglige og sosiale forventninger

Høyt læringstrykk

Undervisning for forståelse

Prioriterer lærer med spesialpedagogikk

Mest inkluderende

PPT samarbeider

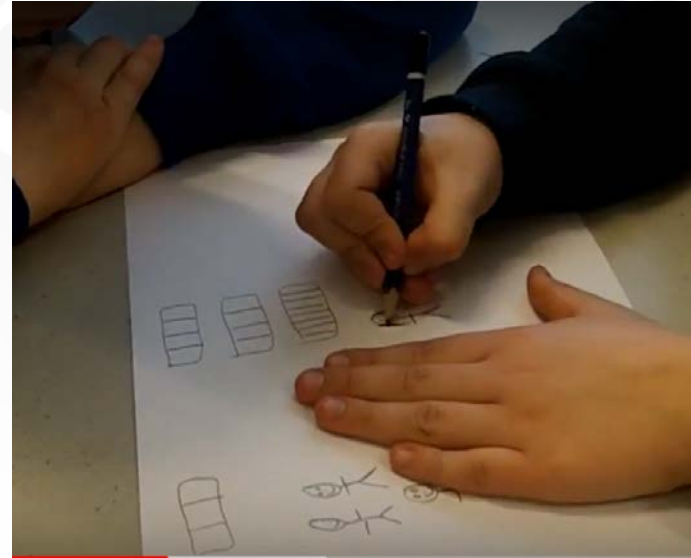
Gjelder også ordinær opplæring

(Haug,2017)

Alle kan lære viktig matematikk

Eleversyn kan

- tenke selv
- er nysgjerrige
- liker å finne ut av ting
- liker utfordringer
- lærer best
 - av det de tenker og gjør selv
 - når de får kommunisert tankene sine til andre



Kan lærere velge hvordan de vil undervise?

Formålet for faget:

Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er.

...

Opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening.

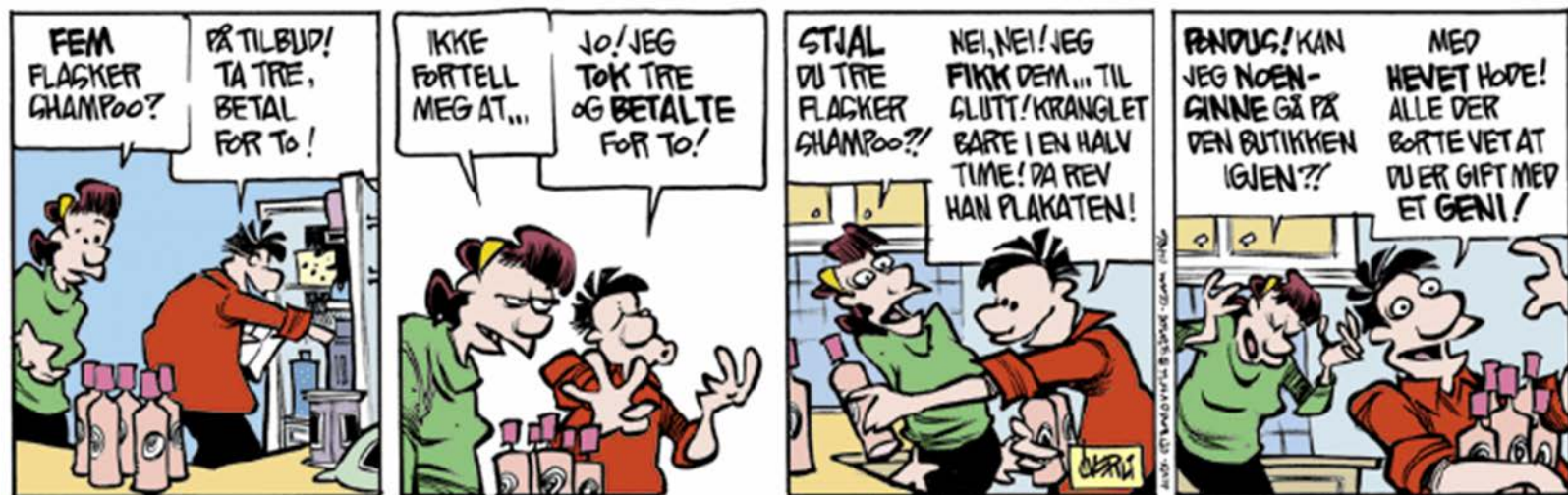
Kompetansemål etter 2., 4., 7. og 10 trinn:

- utvikle, bruke og samtale om ulike reknemetodar ...

Fagfornyelsen

Matematisk kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenking

- Problemløsning
- Resonnering
- Argumentasjon
- Kreativitet
- Dybdelæring



Attgitt med løyve frå Strand&Øverli, distr: strandoverli@yahoo.com

Hvor kan man starte?

- **Bygge på barnets tenkning**
- **Bruke og knytte sammen matematiske representasjoner**
- **Utvikle fleksible strategier**
- **Velge oppgaver som fremmer resonnering og problemløsning**
- Lede undervisningen frem mot læringsmålet
- Legge til rette for matematiske samtaler
- Stille gode spørsmål
- Støtte opp om elevenes produktive strev

Bygge på barnets tenkning

- Planlegge for «å se» barnas tenkning
- Hva er viktig å legge merke til?
- Tolke barnas tenkning i lys av deres læring
- Hvordan respondere til barnas tenkning?



Hva skjer?

- Er det noe du lurer på?
- Hva trenger du å vite for å finne det ut?
- Hvordan vil du finne løsninger?

Se 3-Act Task - Dan Meyer

<http://blog.mrmeyer.com/2013/teaching-with-three-act-tasks-act-one/>

1

60 - 23 = 37

2

Jeg har $10 + 10 + 3 = 23$
 $60 - 10 = 50 - 10 = 40 - 3 = 37$

3

5 → 6 paker → 35 → 25

Elevsvar, 2. trinn

4

10 10 10 10 10 10 → 13

60 - 23 = 37

5

37

23

Capri sonne.
Det er i en boks.
Det er 10 i en boks.
Det er 60 paker
for hele klassen.
Det er 23 i hele
klassen. Det blir i
—jen 37 Capri sonn

23 - Barn.



$588 - 23 = 35$
 $60 - 23 = 37.$

Fremme meningsfull matematisk diskusjon

- Engasjere alle elevene i klassen
- Utveksle ideer både verbalt, visuelt og symbolsk
- Oppklare misforståelser
- Argumentere for egne ideer og løsninger
- Utvikle språk for uttrykke matematiske ideer
- Se på ting fra ulike perspektiver



Gode spørsmål

- hjelper læreren å avdekke hva elevene kan og tilpasse til elevenes nivå
- oppmuntrer elevene til å forklare og reflektere over egen tenkning
- hjelper elevene å skape meningsfulle sammenhenger
- støtter elevene i å stille egne spørsmål.

Samtaletrekk

Lærertrekk	Hva læreren gjør	Fordeler
GJENTA «Du sier at dette er et oddetall?» «Du sier at prosent betyr hundre?» «Så du sier at ...?» «... er det det du mener?»	Gjentar (deler av) elevens utsagn, og ber eleven svare på om det er riktig oppfattet eller ikke. Bekrefter og avklarer.	Gjør elevens ideer tilgjengelige for læreren og andre elever slik at de kan forstå dem. Elevene får «rom til å tenke» slik at de lettere kan følge med på det matematiske innholdet.
REPETERE «Kan du si hva han sa med dine egne ord?»	Spør en annen elev om å repetere medelevens resonnement.	Gir elevene mer tid til å fordøye en ide, samt å høre den på en annen måte. Får bekreftet at andre elever virkelig hørte ideen til eleven. Viser elevene at deres matematiske ideer er viktige og blir tatt på alvor.
RESONNERE «Er du enig eller uenig? Begrunn.» «Hva mener du om det?» «Hvorfor tror du det?»	Spør elevene om å bruke egne resonnement på andres resonnering. Presser på for å få fram resonnement.	Inngangsdør for å få fram elevenes tenking. Posisjonerer elevenes matematiske ideer som viktige. Hjelper elevene med å engasjere seg i hverandres resonnering.
TILFØYE «Har noen noe de vil føye til?» «Kari, du rekker opp hånda, har du noe å tilføye?»	Prøver å få elevene til å delta i en videre diskusjon.	Oppmuntrer elevene til å dele sine ideer. Bidrar til å etablere en norm om å se sammenhenger mellom elevenes matematiske ideer og bygge på dem.
VENTE «Ta den tiden du trenger ... vi venter.» (Tell sakte til 10 – minst!)	Venter uten å si noe.	Bringer viktige bidrag fra flere elever inn i diskusjonen. Kommuniserer en forventning om at alle har viktige ideer de kan bidra med.
SNU OG SNAKK «Snu deg og snakk med eleven ved siden av deg»	Går rundt og lytter til samtalen og vurderer hvem som skal spørres.	Gir elevene mulighet til avklaringer og til å dele ideer. Gir elevene mulighet til å orientere seg mot hverandres tenking.
ENDRE «Har noen endret tenkingen sin?»	Spør om noen av elevene har endret mening.	Gir elevene mulighet til å revurdere og endre tenkingen sin etter nye innspill.

Observere undervisning

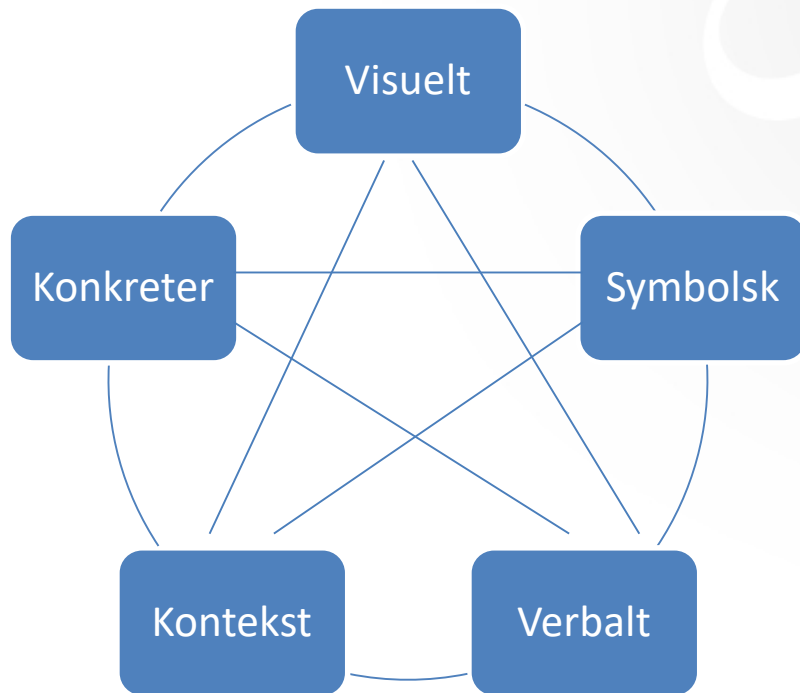
Film: Telle i kor med 4 fra 5

I hvilke sammenhenger ber læreren elevene snakke sammen etter at han har stilt et spørsmål?

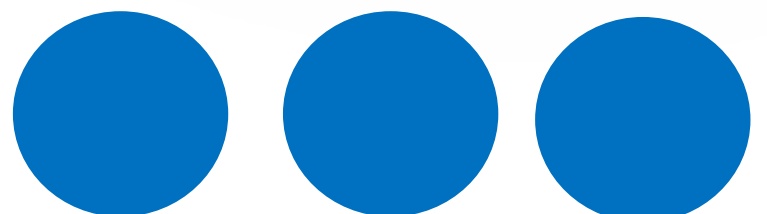
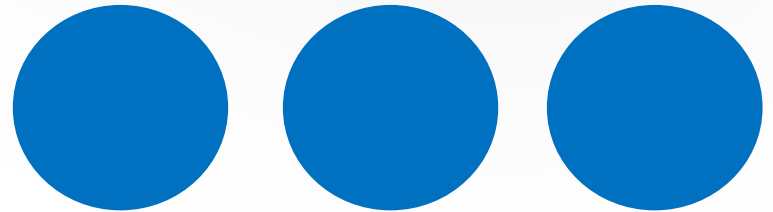
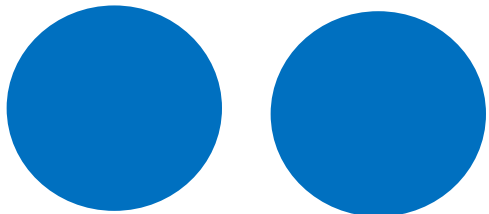
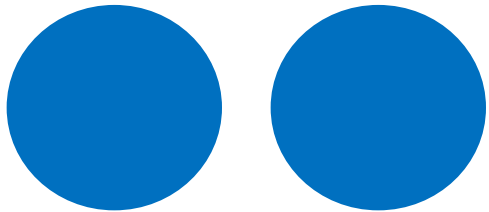
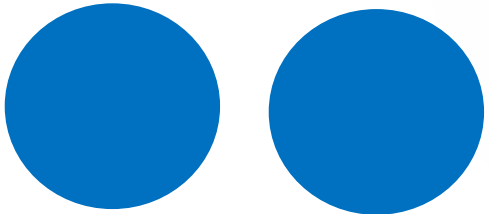
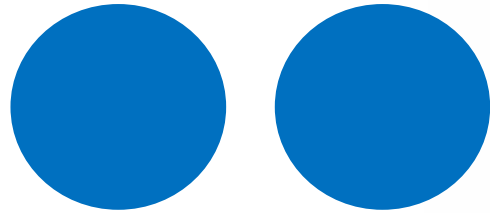


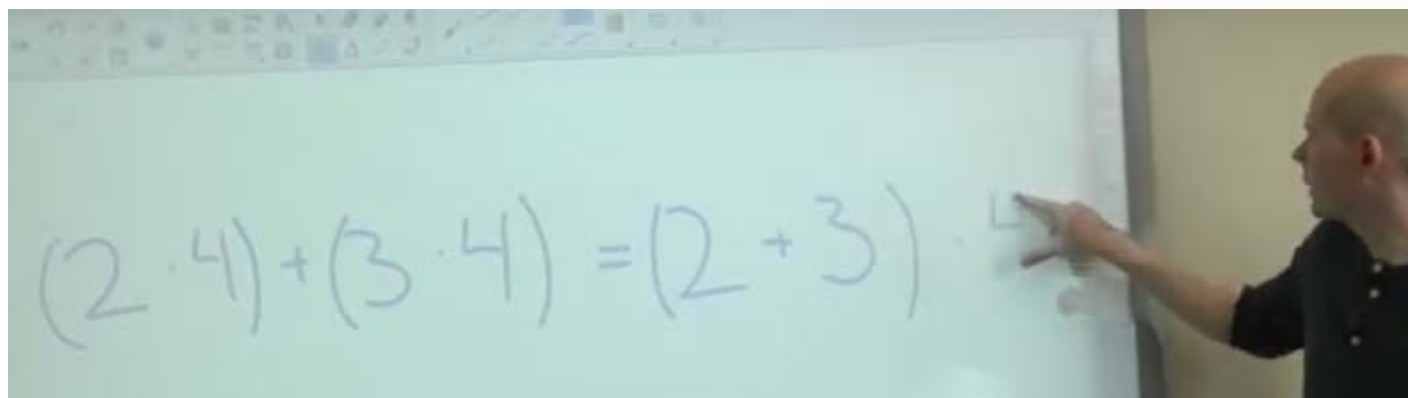
Dette er en av filmene som er utviklet i forbindelse med MAM-prosjektet.
MAM: Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning

Bruke og knytte sammen matematiske representasjoner



Kvikkbilde



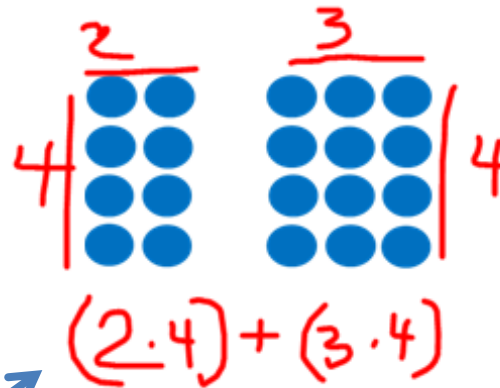
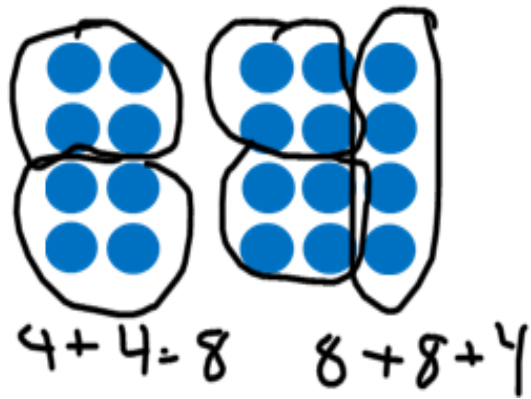


Hentet fra filmen *Kvikkbilde 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4* som er utviklet i forbindelse med MAM-prosjektet.
MAM: Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning

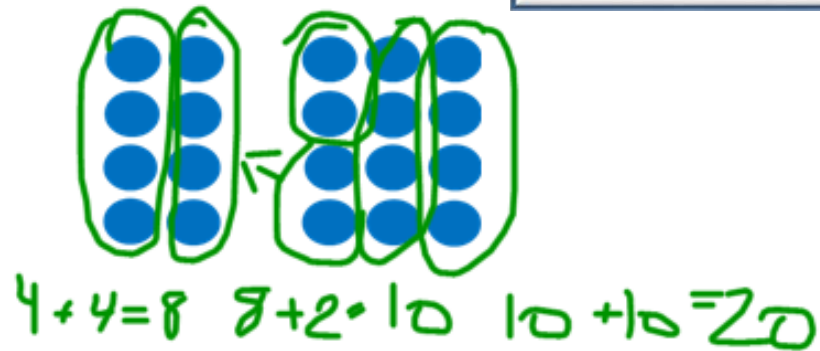
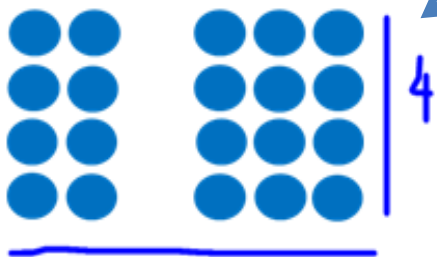
Bruke og koble representasjoner

Mål

- Se tallet 20 på ulike måter ved hjelp av visuelle og symbolske representasjoner.
- Distributiv egenskap ved multiplikasjon.



- Fremme meningsfull matematisk diskusjon
- Stille gode spørsmål
- Lede undervisningen frem mot læringsmålet



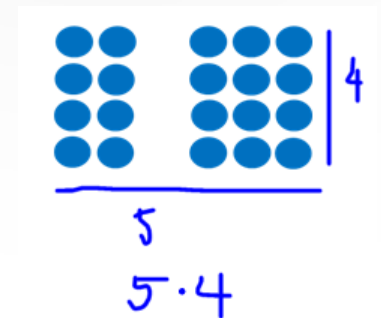
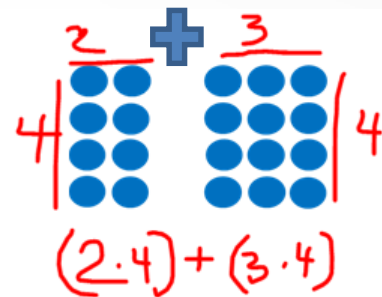
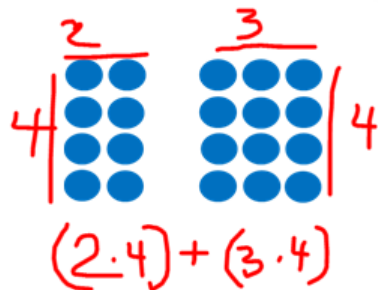
Lede undervisningen frem mot læringsmålet

$$(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = 5 \cdot 4$$

Kan vi se på tallene at dette stemmer?

$$(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = (2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4$$

Kan vi se det i figuren?



Høye faglige forventninger

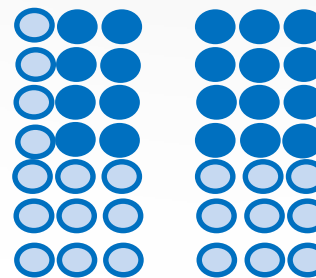
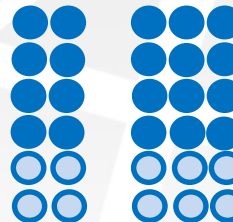
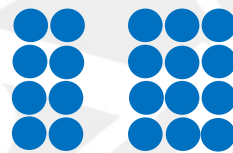
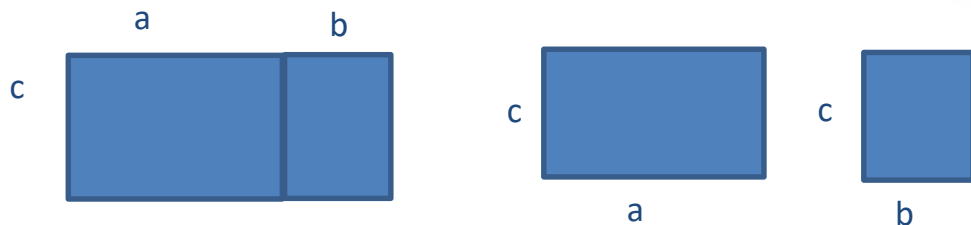
Gjelder det kun for disse tallene?

$$(2 \cdot 6) + (3 \cdot 6) = (2 + 3) \cdot 6 = 5 \cdot 6$$

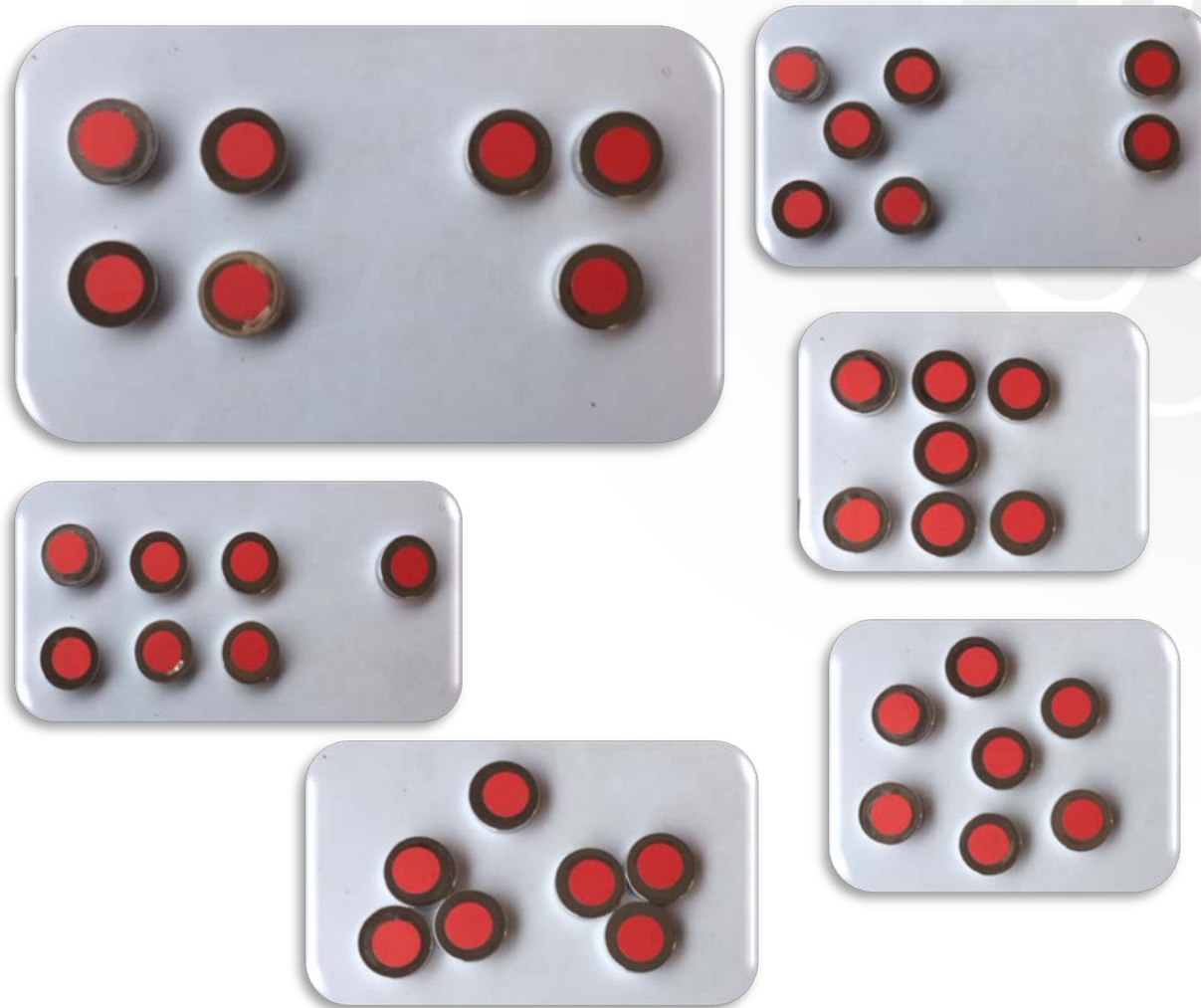
$$(3 \cdot 7) + (3 \cdot 7) = (3 + 3) \cdot 7 = 6 \cdot 7$$

Gjelder det alltid?

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$



Kvikkbilder med 1. klasse



7	
6	1
5	2
4	3
3	4
2	5
1	6

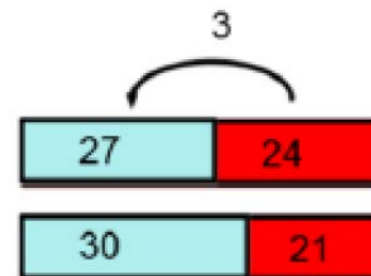
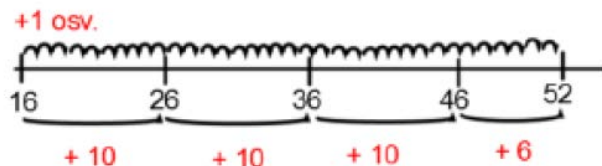
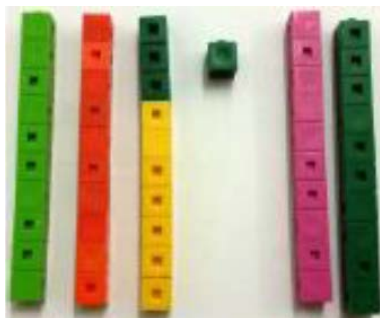
25 · 12

Utvikle fleksible strategier

Direkte
modellering

Tellestrategier

Avledet
tallfakta/tallfakta




Velg oppgaver som fremmer resonnering og problemløsning

Tallkameratene til 15



		$_ + _ = _$	$15 - _ = _$
		$_ + _ = _$	$15 - _ = _$

		$_ + _ = _$	$_ - _ = _$
		$_ + _ = _$	$_ - _ = _$

		$_ + _ = _$	$_ - _ = _$
		$_ + _ = _$	$_ - _ = _$



$$28 + 5 = _ \quad 37 + 7 = _ \quad 83 + 9 = _$$

$$49 + 6 = _ \quad 35 - 9 = _ \quad 45 - 8 = _$$

$$26 + 9 = _ \quad 55 - 6 = _ \quad 95 - 7 = _$$

Bestefars tiere

Bestefar har spart slik at han har 65 tiere. Han vil gi penger til barnebarna sine. De små skal få 3 tiere hver og de store skal få 7 tiere hver.

Da alle barnebarna hadde fått det de skulle ha, var det ingen tiere igjen!

Hvor mange barnebarn kan bestefar ha?
Hvordan kan du argumentere for løsningen(e) dine?

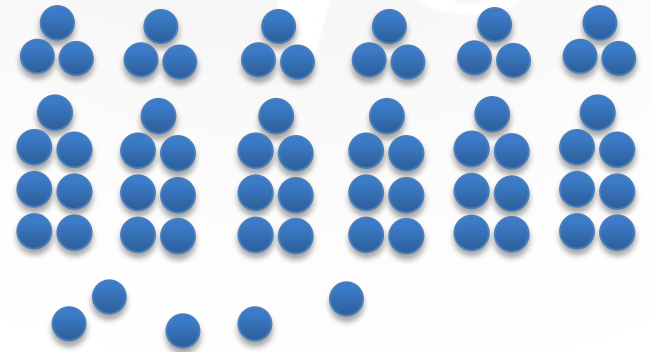


Elevsvar

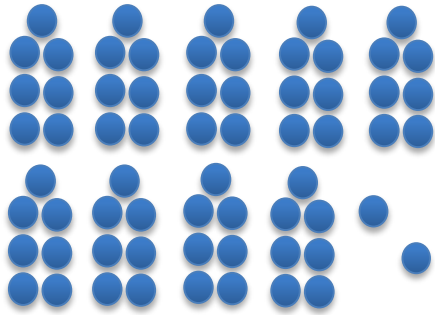
Sju pluss tre er ti
og ti går ikke opp i 65.

Det går ikke.

Det blir fem til overs.



Problemløsningsstrategi: Prøve og feile



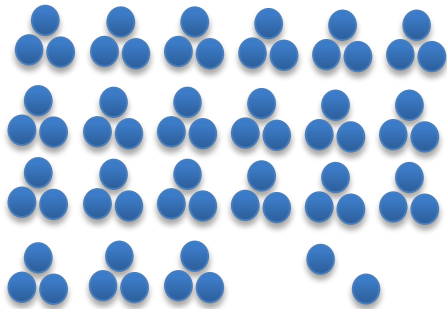
~~X~~ ~~X~~
 $7 \cdot 8 = 56$ $9 + 33$
 $8 \cdot 3$
8 store
3 små

5 store
10 små
2 store
17 små

Hva gjorde vi?:

- Vi delte brikkene i 7er grupper.
- Så var det to til overs.
- Så tok vi bort en 7er gruppe så fikk vi svaret!!

Vi la merke til et **mønster** og kan begrunne hvorfor det er **KUN** tre mulige løsninger: For hver løsning som går opp, er det to som ikke går opp. Den neste løsningen ville være med to minus tre store barnebarn. Det blir minus et stort barnebarn, og det går ikke.



Vi tenker i små barn.

Vi starter med å sette sammen tienne i treergrupper.

Så da tenker vi at hvis det går opp i treer grupper får vi et helt antall med små barnebarn.

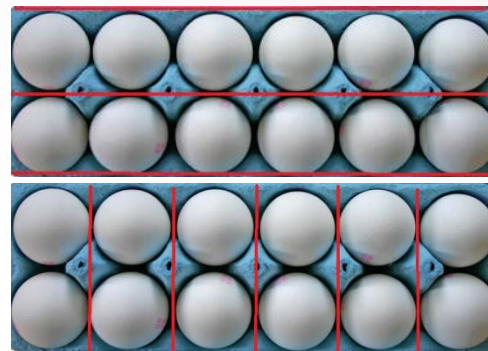
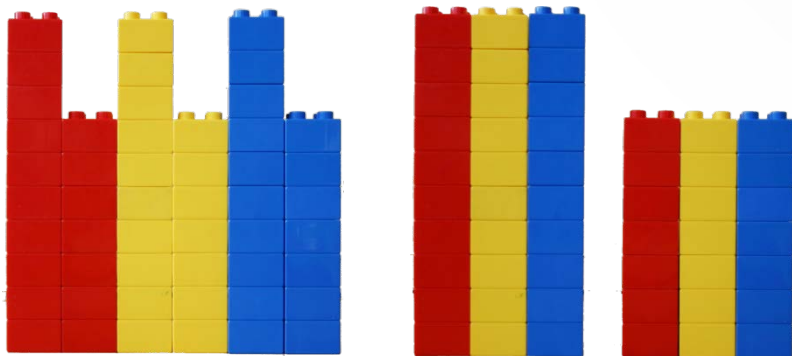
Men det går ikke opp fordi vi har 65 og da blir det 2 til overs.

Vi tenkte som gruppe K men vi startet med 3 og da startet med 7.

Barnebarn	Tiere	Barnebarn
Store	Antall	Rest
9	63	2
8	56	9
7	49	16
6	42	23
5	35	30
4	28	37
3	21	44
2	14	51

Læreren må

- velge oppgaver som gir elevene anledning til å velge hvilken representasjon de vil bruke for å skaffe seg oversikt på problemet.
- introdusere ulike typer representasjoner som kan være nyttige i mange sammenhenger.



$$2 \cdot 6$$

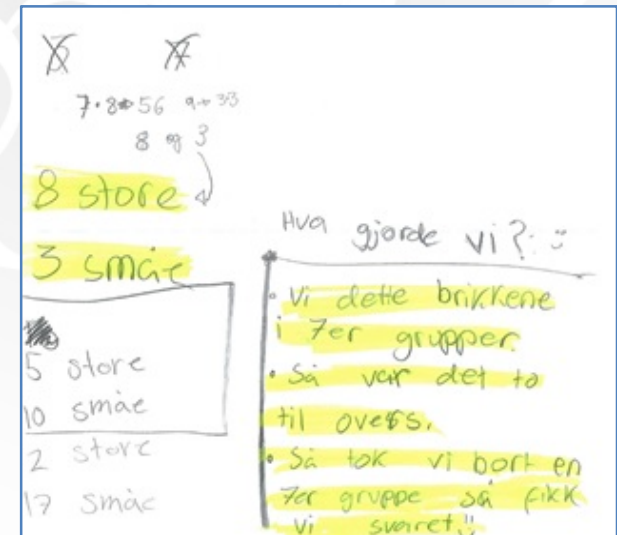
$$6 \cdot 2$$

Med Legoklosser kan vi se $3 \cdot 17$ som
 $3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$

Støtte opp om elevenes produktive strev

Elevene

- får dypere forståelse av matematisk struktur i et problem
- ser sammenheng mellom ulike matematiske ideer
- lærer matematikk med forståelse
- blir bedre rustet til å bruke det de har lært i nye situasjoner



Uproduktivt når elevene ikke finner mening i det de gjør, ikke ser sammenhenger eller kan forklare det de gjør, eller ikke er i stand til å løse problemet .

Hva skaper den gode læringen?

- Russisk matematikk?
- Singapore-matematikk?
- RME, undersøkende – Fosnot?
- Rike oppgaver?
- Åpne oppgaver?
- Selve oppgaven eller opplegget?
- Undervisningen?

Struktur - Contexts for learning

Eksempel fra **Ages and Timelines**

Dag 1: Elevene undersøker kontekst – **læreren støtter og observer** – forbereder matematikkongress

Matematikkongress: elevarbeid blir presentert, matematikken blir diskutert – **læreren leder samtalen**

Dag 2: Minileksjon: **Setter søkelys på sentral matematikk/strategier knyttet til konteksten**

Elevene undersøker konteksten videre – **læreren oppfordrer** til å bruke strategier fra minileksjonen

Dag 3: Minileksjon: **Sentral matematikk.**

Forberedelse til matematikkongress (plakater). **Diskutere mønster.**

Dag 4: Matematikkongress.

Elevene diskuterer plakaten med **fokus på sammenheng mellom problemene.**

Dag 5: Minileksjon: **Oppgavestreng**

Elever undersøker kontekst med egne data – **lærer hjelper til**

Utvikling av matematikkundervisning?

- Velge læreverk?
- Kutte ut læreboka?
- Lage oppgavebank?
- Bruke Kikora el. I.?

Kollegialt samarbeid om


- forståelse for faget
- elevtenking
- undervisning basert på elevenes tanker
- sentrale matematiske ideer



Oppsummering

- Avdekke og bruke elevenes tanker
- Utvikle fleksible strategier
- Støtte produktivt strev
- Snakke om undervisning, ikke om opplegg
- Legge mer vekt på **hvorfor** enn på **hva**
- Jobbe grundig med tall og tallforståelse





Lykke til med
kollegialt samarbeid
om å utvikle
matematikkundervisningen

Inkludering – relasjon – tilpasning