2 Funksjoner i GeoGebra

GeoGebra er et utmerket verktøy til å utforske og analysere funksjoner. I dette kapittelet skal du lære hvordan du kan tegne grafer, bestemme nullpunkt, ekstremalpunkt og andre interessante punkt på grafen til en funksjon. Du skal også lære å løse likningssystem og løse ulikheter grafisk.

2.1 Plotting, nullpunkt og ekstremalpunkt

Eksempel 2.1

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad x \in \langle -3, 4 \rangle$$

a) Tegn grafen til f i et koordinatsystem.

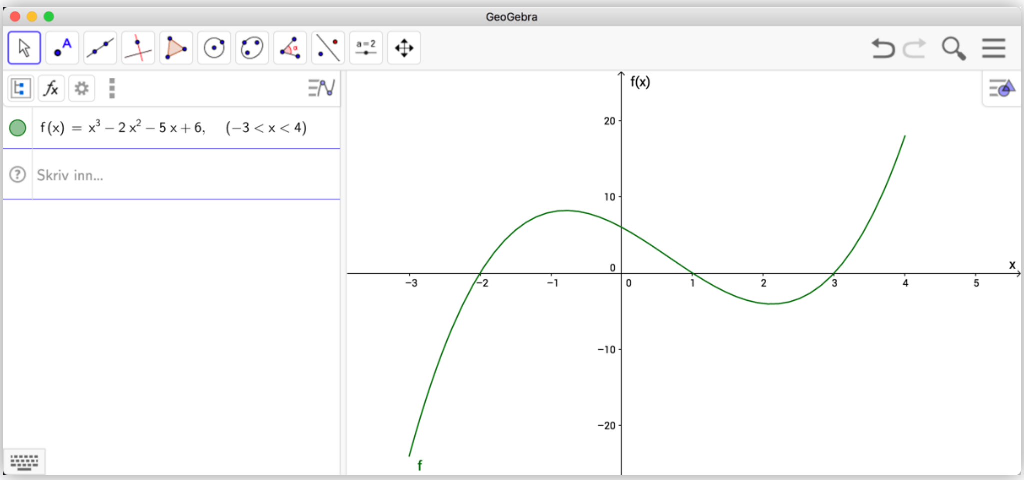
b) Bestem eventuelle nullpunkt til f.

c) Bestem eventuelle topp-/bunnpunkt til grafen til f.

Løsning:

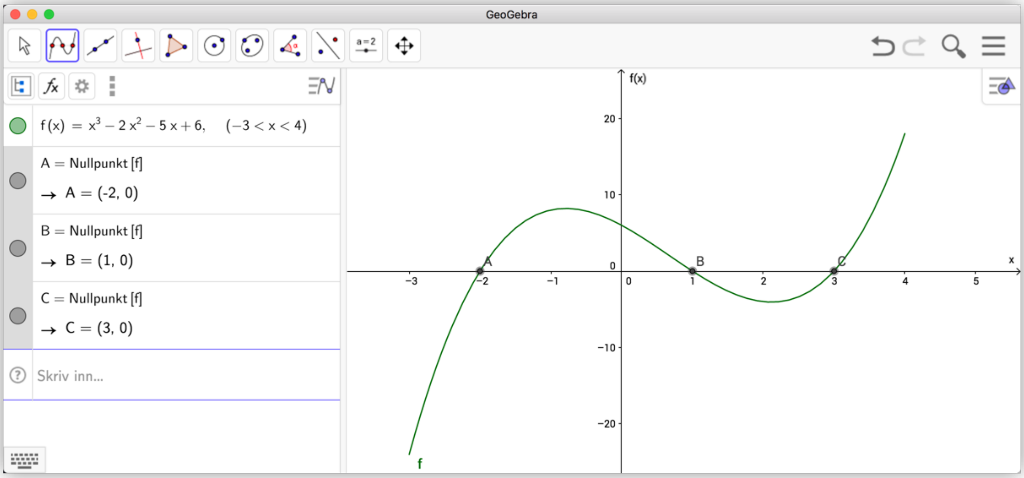
a) Skriver inn $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6,\ \ -3 < x < 4$ i algebrafeltet og får tegnet inn grafen til f.

Tips! Eksponenter kan skrives inn ved å trykke inn for Alt + tall. For eksempel vil Alt+2 gi «opphøyd i 2». Du kan også få dette til ved å skrive x^2 eller x**2. Begge gir x^2.



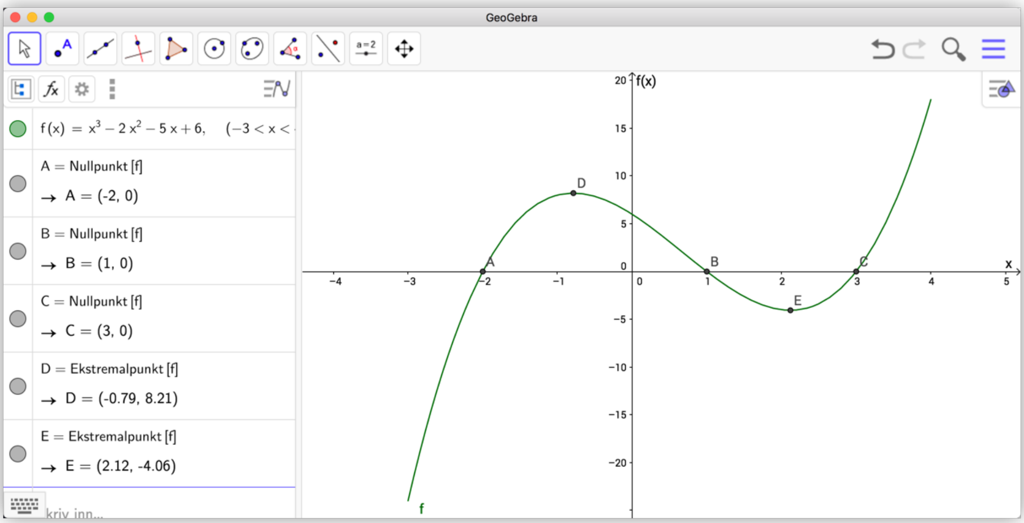
Du kan endre skaleringen på aksene ved å velge verktøyet *Flytt grafikkfeltet* . Når dette er valgt kan du flytte grafikkfeltet eller du kan dra i aksene slik at de bli skalert.

b) Den enkleste måten å finne nullpunkt er å bruke verktøyet *Nullpunkt* . Dette finner du ved å klikke på punktverktøyet *Nytt punkt* . Du får da opp en liste av ulike verktøy. Velg *Nullpunkt* og klikk deretter på grafen til f. Da vil du få alle nullpunktene.

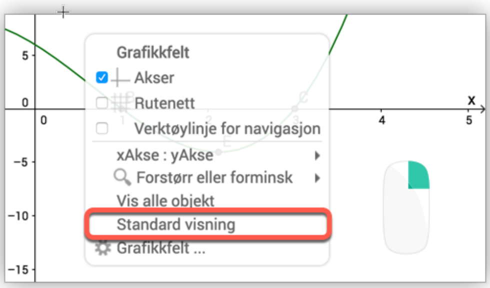


Figur 2.1: Nullpunktene til en funksjon

c) Vi går fram på samme måte som i b), men denne gangen bruker vi verktøyet *Ekstremalpunkt* . Velger dette verktøyet og klikker deretter på grafen til f. Da får vi de to ekstremalpunktene. Vi ser at grafen har toppunkt i $D(-0{,}79,\ 0{,}821)$ og et bunnpunkt i $E(2{,}12,\ -4{,}06)$.



Tips! Du kan justere aksene tilbake til standard visning ved å høyreklikke i grafikkfeltet og velge «Standard visning». Du kan også bruke tastekombinasjonen Ctrl + M.



Figur 2.2: Standard visning zoomer grafikkfeltet tilbake til sist lagrede innstilling.

I neste eksempel vil vi finne blant annet nullpunkt og ekstremalpunkt ved å gi ulike kommandoer i algebrafeltet.

Eksempel 2.2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x}$$

a) Bestem eventuelle nullpunkt til f

b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt til grafen til f

c) Bestem asymptotene til f.

Løsning:

a) Vi skriver først inn funksjonen i algebrafeltet. Deretter bruker vi kommandoen

```
Nullpunkt(<funksjon>, <Start>, <Slutt>)
```

Start- og sluttverdiene er to x-verdier som nullpunktet vil ligge mellom. I dette tilfellet skriver vi inn

```
Nullpunkt(f, -3, 1)
```

og får punktet $(-1, 0)$. Se figur 2.3.

b) Vi kan finne ekstremalpunkt til andre funksjoner enn polynomer. For å finne slike topp- eller bunnpunkt må vi avgrense området som punktet ligger i. Vi bruker kommandoen

```
Ekstremalpunkt(<funksjon>, <fra>, <til>)
```

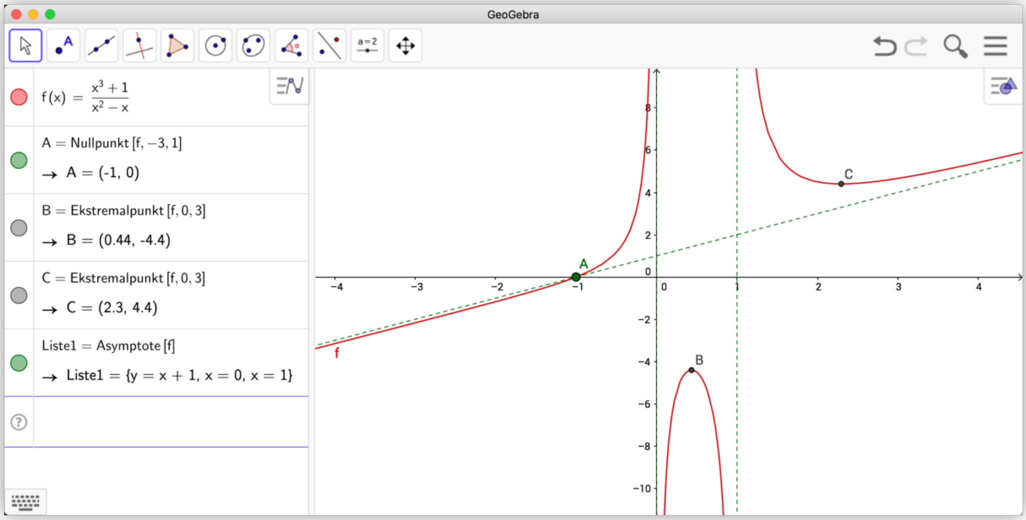
I dette eksempelet ser vi ut fra grafen til f at det er et toppunkt rundt $x = 0{,}5$ og et bunnpunkt rundt $x = 2{,}4$. Vi bruker derfor kommandoene

```
Ekstremalpunkt(f, 0, 3)
```

Vi ser at grafen har et toppunkt i (0,44, −4,4) og et bunnpunkt i (2,3, 4,4)

c) Vi finner asymptoter til en graf ved å bruke kommandoen `Asymptote(<funksjon>)`. I dette eksempelet skriver vi inn `Asymptote(f)`. Vi får da tegnet opp tre asymptoter. Disse er oppgitt i en liste i algebrafeltet:

$$\{-x + y = 1, x = 0, x = 1\}$$



Figur 2.3: Nullpunkt, ekstemalpunkt og asympoteter til funksjonen i eksempel 2.2

Oppgave 2.1

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2, \qquad x \in [0,2]$.

a) Tegn grafen til f i et koordinatsystem.

b) Finn eventuelle nullpunkt til f.

c) Finn eventuelle topp-/bunnpunkt til grafen til f.

Oppgave 2.2

Gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - 1$.

a) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt til grafen.

b) Bestem eventuelle asymptoter.

Oppgave 2.3 — Eksempelsettet til MAT1011 Matematikk 1P, Høsten 2009.
En fabrikk produserer CD-stativer. Det koster $K(x)$ kroner å produsere x stativer per måned, der

$$K(x) = 12\,000 + 60x + 0{,}2x^2$$

a) Tegn grafen til K i et koordinatsystem. Velg x-verdier fra 0 til 800.

b) Hvor mange stativer kan produseres for 68 000 kroner?

Fabrikken regner med å selge de x stativene for $I(x)$ kroner per måned, der

$$I(x) = 200x$$

c) Tegn grafen til I i samme koordinatsystem som grafen til K.

d) Gjør nødvendige beregninger og kom med forslag til hvor mange CD-stativer som fabrikken må produsere for å gå med overskudd.

GeoGebra kan også derivere funksjoner. Har du skrevet inn en funksjon $f(x)$ i algebrafeltet, er det bare til å skrive $f'(x)$ i algebrafeltet og GeoGebra deriverer f. Du kan også derivere en funksjon $f(x)$ ved å bruke kommandoen `Derivert[f]`.

Eksempel 2.3

Deriver funksjonen $f(x) = x^3 \sin(x)$.

Løsning:
Vi skriver først inn funksjonsuttrykket til f i algebrafeltet. For å derivere funksjonen skriver du så inn `f'(x)` i algebrafeltet. Vi kan da lese av svaret i algebrafeltet:

Vi har altså funnet at $f'(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x)$.

Tips! Du også kan bruke kommandoen `Derivert(<Funksjon>,<tall>)` for å derivere en funksjon. Tallet du da oppgir er antall ganger du vil derivere funksjonen. Kommandoen `Derivert(f, 2)` gir med andre ord den dobbeltderiverte til f. Dette kunne vi også funnet ved å skrive inn `f''(x)`.

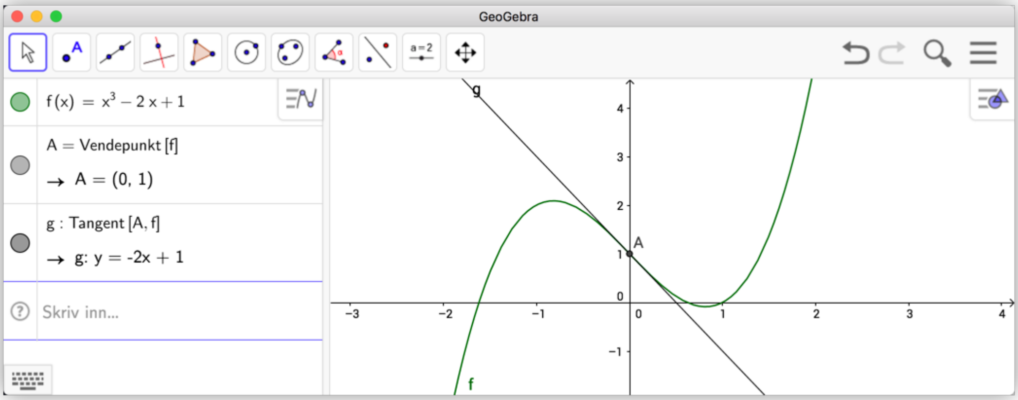
Eksempel 2.4

Finn vendepunktet til funskjonen $f(x) = x^3 - 2x + 1$, og finn likningen til tangenten i vendepunktet.

Løsning:
Vi kan selvsagt finne vendepunkt ved å se hvor den dobbeltderiverte skifter fortegn. Men GeoGebra har en egen kommando som heter `Vendepunkt`. For polynomer er det nok å skrive inn `Vendepunkt[<polynom>]`.

I dette eksempelet skriver vi først inn funksjonen f og deretter kommandoen `Vendepunkt[f]`. Vi finner da at f har vendepunkt i $A = (0, 1)$.

Vi finner tangenten til f i A ved å skrive `Tangent(A,f)`. Vi får da tegnet inn tangenten i grafikkfeltet og kan lese av likningen i algebrafeltet:



Vi ser at likningen til tangenten er $y = -2x + 1$.

Vi kunne også ha funnet likningen til tangenten ved å bruke verktøyet *Tangenter* . Når du har valgt dette verktøyet, klikker du først på et punkt som tangenten skal gå gjennom og deretter på grafen (eller kjeglesnittet).

Oppgave 2.4 — Eksempelsettet til MAT1011 Matematikk 1P, Høsten 2009.

a) Tegn tre rette linjer i tre forskjellige koordinatsystemer og finn stigningstallet til hver av linjene.

b) Tegn linjer som står vinkelrett på linjene i a) og finn stigningstallene til disse linjene også.

c) Multipliser sammen stigningstallene til linjene som står vinkelrett på hverandre. Lag en hypotese om sammenhengen mellom stigningstallene til to linjer som står vinkelrett på hverandre.

Tips! Du trenger ikke å derivere for å finne stigningstallet til ei linje. Du kan skrive `Stigning(a)` for å finne stigningstallet til ei linje a.

Oppgave 2.5
Deriver funksjonene

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2-2x}$ c) $h(x) = 10^x$

Oppgave 2.6
Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$$

a) Tegn grafen til g i et koordinatsystem.

b) Tegn den deriverte $g'(x)$ i samme koordiantsystem.

c) Bruk den deriverte til å bestemme eventuelle topp- eller bunnpunkt på grafen til g.

d) Har grafen til g vendepunkt?

Oppgave 2.7 — Eksempelsettet til MAT1013 Matematikk 1T, Høsten 2009.
La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

a) Tegn grafen til f. Finn koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

b) Finn stigningstallet til linja l gjennom toppunktet og bunnpunktet.

La m være gjennomsnittet av x-koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

c) Finn stigningstallet til tangenten til grafen til f i punktet $(m, f(m))$. Vis at forholdet mellom stigningstallene til linjene l og t er $\frac{2}{3}$.

d) Finn to andre tredjegradsfunksjoner som har både toppunkt og bunnpunkt. Løs oppgavene a), b) og c) for hver av disse funksjonene.

Sett opp en hypotese om forholdet mellom stigningstallene til linja l og tangenten t.

For et punkt A kan du hente ut x-koordinaten ved å skrive `x(A)` i algebrafeltet. Tilsvarende får du y-koordinaten med kommandoen `y(A)`. Du kan regne med punkt akkurat som vektorer. Det vil si at gjennomsnittet mellom to punkt `A` og `B` er `(A+B)/2`.

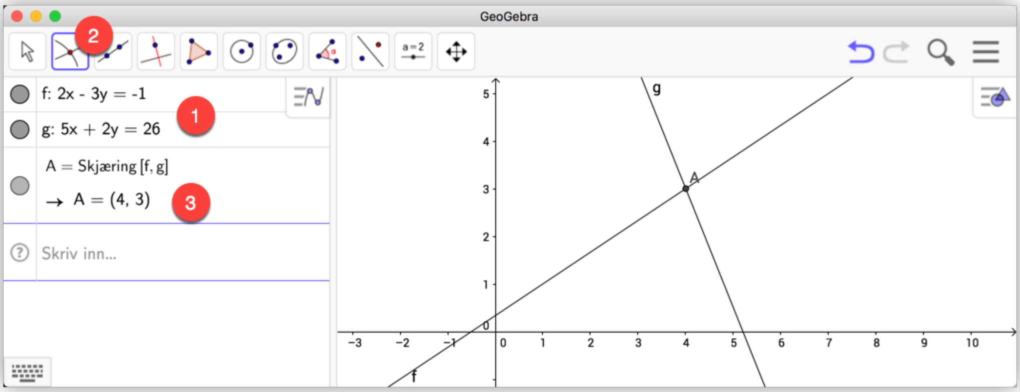
2.2 Skjæringspunkt mellom to objekt

Eksempel 2.5

Løs likningssystemet

$$
\begin{aligned}
2x - 3y &= -1 \\
5x + 2y &= 26
\end{aligned}
$$

Vi skriver inn likningene en etter en i algebrafeltet (se (1) på figur 2.4). Når vi trykker enter vil linjene som likningene representerer bli tegnet i koordinatsystemet i grafikkfeltet. Vi kan nå velge *Skjæring mellom to objekt* (2) på verktøylinja, klikke først på den ene linja, så den andre, og få markert skjæringspunktet $A = (4,3)$ (3). Det vil si at $x = 4$ og $y = 3$. Det fins også en egen kommando for skjæring mellom to kurver, nemlig `Skjæring`.



Figur 2.4: Grafisk løsning av et likningssystem

Eksempel 2.6

Gitt funksjonene $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x - 1$.

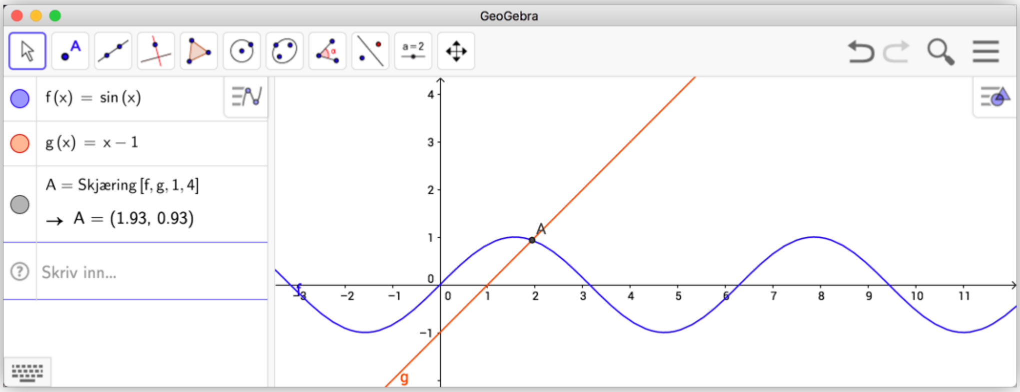
a) Tegn grafen til f og g i samme koordinatsystem.

b) Finn skjæringspunktet til grafene.

Løsning:
Vi skriver inn funksjonene algebrafeltet i GeoGebra. Du kan enten bruke verktøyet *Skjæring mellom to objekt* som beskrevet over, eller du kan skrive inn kommandoen

```
Skjæring[f,g,1,4]
```

i algebrafeltet. Her er tallene 1 og 4 valgt som start- og sluttverdi. Det vil si to x-verdier som skjæringspunktets x-koordinat ligger mellom. Vi får da at skjæringspunktet er $A = (1{,}93,\ 0{,}93)$.



Figur 2.5: Skjæring mellom to grafer.

Oppgave 2.8
Løs likningssettene

a) $x - y = 9$ og $3x + 5y = 11$

b) $y = x^2 - 2$ og $x^2 + y^2 = 8$

2.3 Ulikheter

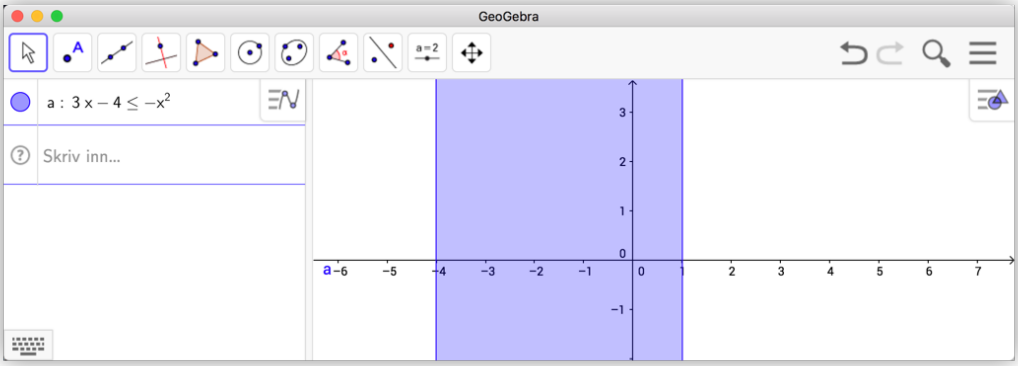
GeoGebra kan være til stor hjelp når vi skal løse ulikheter. Som vanlig tar vi utgangspunkt i noen eksempler.

Eksempel 2.7

Løs ulikheten $3x - 4 \leq -x^2$.

Løsning:
Skriv inn ulikheten i algebrafeltet. For å få $\leq$ kan du enten skrive «<=» eller finne symbolet $\leq$ i det virtuelle tastaturet. [1] Trykk enter og du vil kunne lese av løsningsmengden som det blå området i grafikkfeltet på figur 2.6.

[1]Du kan også trykke Alt + ; for å få $\leq$. Bytter du ut ; med . får du $\geq$



Figur 2.6: Du kan løse ulikheter i GeoGebra ved å skrive dem inn i inntastingsfetet

Vi ser at løsningsmengden er gitt ved $-4 \leq x \leq 1$.

Vi kan også løse slike ulikheter i GeoGebra CAS. Dette kan du lese om på side 94.

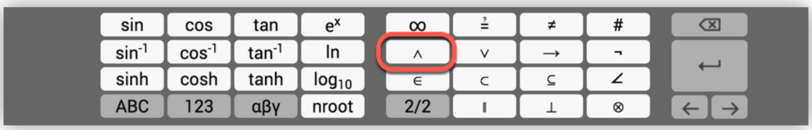
Det neste eksempelet er særdeles relevant i Matematikk S1, hvor elevene må løse lineære optimeringsproblem. Dette innebærer blant annet å finne et område i planet definert av et sett med ulikheter.

Eksempel 2.8

Skraver området definert med ulikhetene

$$
\begin{aligned}
0 < x &< 5 \\
0 < y &\leq 4 \\
x + 2y &\leq 10
\end{aligned}
$$

Løsning:
I dette tilfellet er det ikke lurt å skrive inn én ulikhet om gangen. I stedet skriver vi alle inn i én omgang. For å gjøre dette må vi fortelle GeoGebra at alle ulikhetene skal være tilfredsstilt samtidig. Vi vil derfor skrive inn det logiske tegnet for *og* mellom ulikhetene. Vi kan finne dette tegnet i det virtuelle tastaturet, men det enkleste er nok å skrive & to ganger, slik: &&.

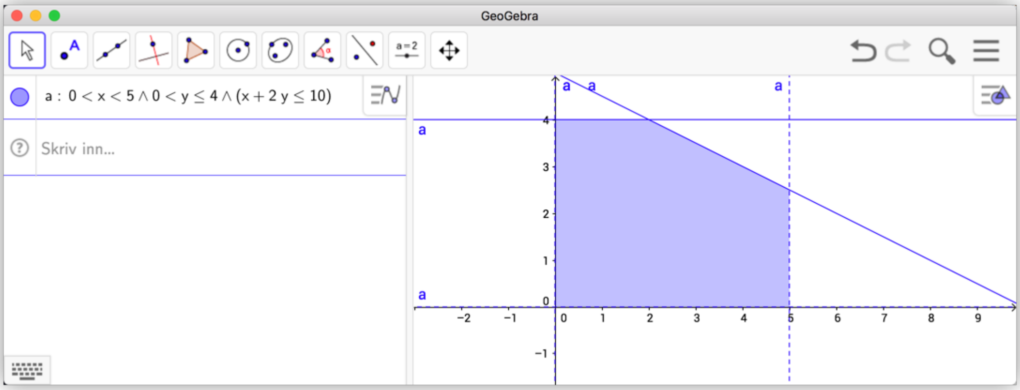


Figur 2.7: Du finner $\wedge$ og mange andre symboler i det virtuelle tastaturet.

Skriv så inn alle ulikhetene i algebrafeltet. I dette tilfellet har vi skrevet inn følgende i algebrafeltet:

```
0<x<5 && 0<y<=4 && x+2y<=10
```

Resultatet ser du på figur 2.8. Vi har fått tegnet opp området som tilfredsstiller alle ulikhetene. Legg merke til at linjene der vi har mindre-eller-lik er heltrukne, mens der vi har ekte ulikhet er stiplet.



Figur 2.8: Bruk ∧ eller && mellom ulikhetene.

Tips! Dersom du ønsker å finne koordinatene til hjørnene til et område definert av ulikheter, kan du bruke kommandoen `Toppunkt`. Skriver vi for eksempel inn `Toppunkt(a)` i eksempelet ovenfor, vil vi få alle skjæringspunktene mellom de ulike linjene.

Oppgave 2.9
Løs ulikheten $x^2 < 5 + 4x$ i GeoGebra.

Oppgave 2.10
Skraver området definert ved ulikhetene

$$\begin{aligned} y &> x^2 \\ -x^2 &< 2y - 3 \end{aligned}$$

Oppgave 2.11
For hvilken x og y vil $F(x,y) = 12x + 8y$ ha sin største verdi dersom

$$\begin{aligned} &0 \le x \le 10 \\ &0 \le y \le 8 \\ &2x + 3y \le 36 \\ &6x + y \le 60 \end{aligned}$$

Tegn området definert av ulikhetene og bestem punktet som gir den største verdien.

Oppgave 2.12 — Eksamen REA3026 Matematikk S1, Høsten 2010.
En ferje frakter personbiler og lastebiler. En personbil trenger et areal på $15\,\text{m}^2$ når den står parkert på ferja, mens en lastebil trenger $50\,\text{m}^2$. Arealet av hele ferjedekket er $2\,100\,\text{m}^2$.

En personbil veier i gjennomsnitt 1 t (tonn), og en lastebil veier 10 t. Den samlede vekten av bilene på ferja må ikke overstige 250 t.

Det koster 106 kroner for en personbil på denne ferjestrekningen, mens det koster 603 kroner for en lastebil.

La x være antall personbiler og y antall lastebiler om bord på ferja ved en overfart.

a) Sett opp ulikheter som avgrenser antall personbiler og lastebiler det er mulig å ta med på ferja.

b) Tegn grafer som illustrerer ulikhetene i et koordinatsystem. Marker på figuren hvilket område som angir de mulige antallene av personbiler og lastebiler.

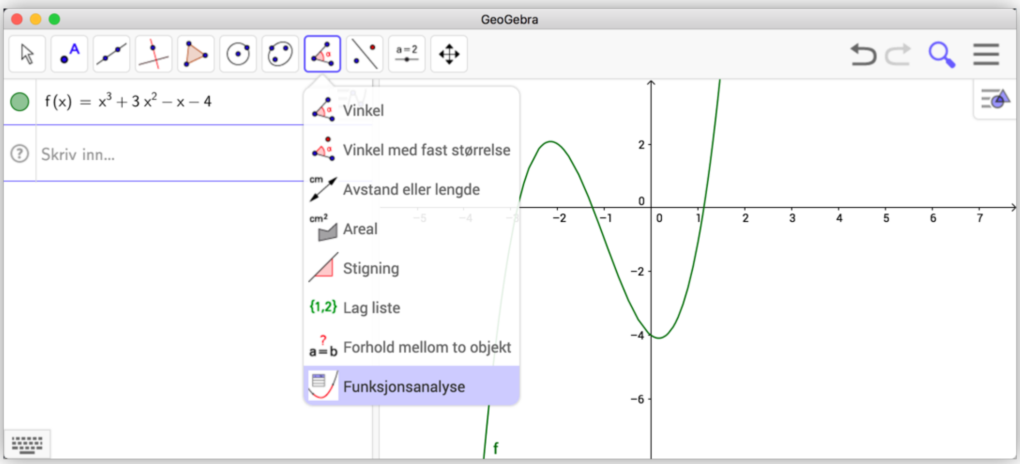
c) Sett opp et uttrykk som viser hvor stor inntekt ferjeselskapet har på en overfart. Finn den fordelingen av personbiler og lastebiler som gir høyest inntekt for selskapet. Hva er den største inntekten selskapet kan oppnå på en overfart?

Det innføres nye regler. Av sikkerhetsgrunner er det ikke lenger tillatt å ta med mer enn 14 lastebiler.

d) Hva blir nå den høyeste inntekten som er mulig å oppnå på en overfart?

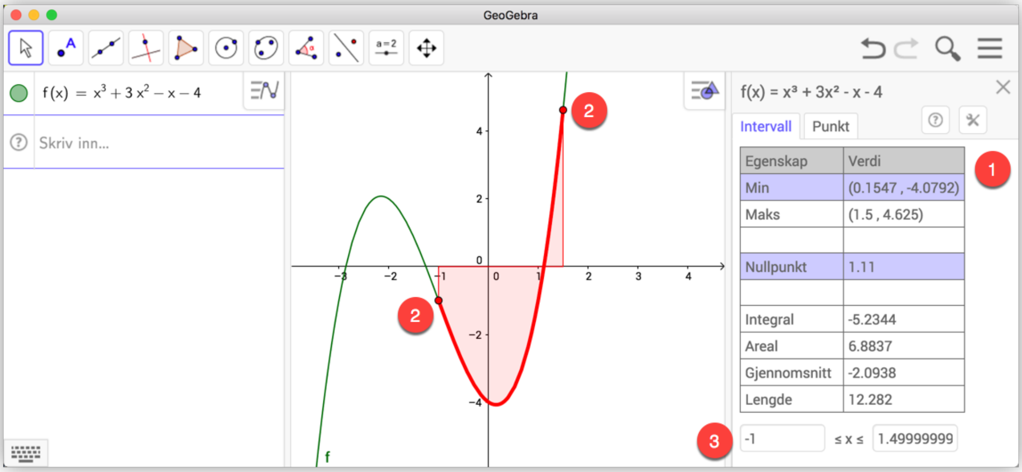
2.4 Funksjonsanalyse

GeoGebra har også et nyttig verktøy til utforsking og undersøkelser av funksjoner. Dette verktøyet ligger i samme gruppe på verktøylinjen som «Vinkel» og har fått navnet «Funksjonsanalyse» .



Figur 2.9: Du finne *Funksjonsanalyse* i samme kategori *Vinkel*

Før du kan bruke dette verktøyet må du skrive inn funksjonen du vil undersøke. Skriv inn funksjonsuttrykket i algebrafeltet, velg *Funksjonsanalyse* og klikk på funksjonen (enten i algebrafeltet eller på grafen). Du vil da få opp et vindu (1) som vist til høyre for grafikkfeltet på figur 2.10.



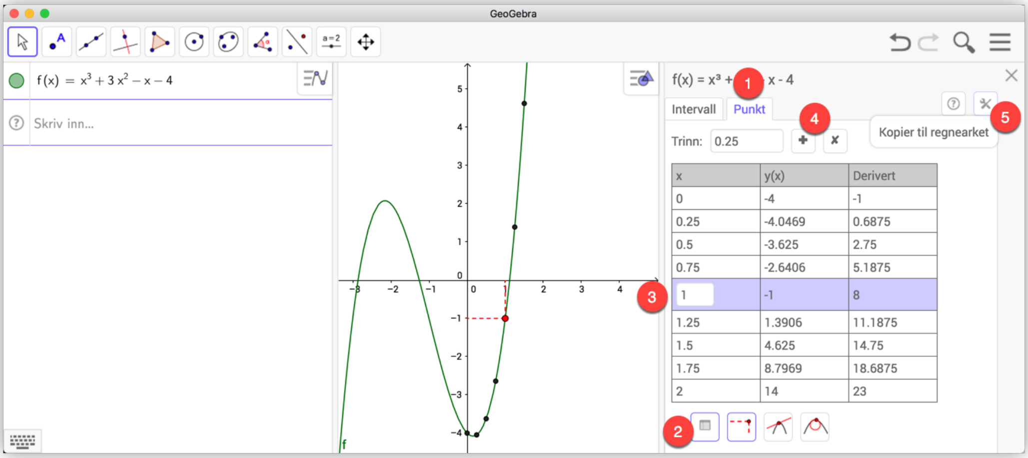
Figur 2.10: Vi må velge intervallet vi vil studere ved enten å skrive inn intervallet eller ved å dra i de to punkta på grafen.

I figur 2.10 har vi skrevet inn funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 4$$

La oss si at vi ønsker å studere egeneskapene til denne funksjonen i intervallet $[-1, 1{,}5]$. Vi kan da enten dra i de to røde punkta på grafen (2) eller vi kan skrive inn -1 og $1{,}5$ nederst i Funksjonsanalysevinduet (3). Se figur 2.10. Da kan vi lese av ulike egenskaper til funksjonen i dette intervallet. Vi ser for eksempel at grafen har et bunnpunkt i $(0{,}1547, -4{,}0792)$ og nullpunkt i $x = 1{,}11$. Legg også merke til at vi kan lese av integralet og arealet mellom grafen og x-aksen. Sistnevnte er større enn integralet, siden integralet er negativt mellom $x = -1$ og $x = 1{,}11$.

Under fliken «Punkt» (1) (se figur 2.11) kan vi også få ut lister med verdier tilhørende grafen til f. For å få fram denne listen må vi klikke på knappen (2) nede til venstre i funksjonsanalyse. På figur 2.11 ser vi en liste med ni rader der vi kan lese av verditabell for f og dens deriverte. Du kan dra det midterste punktet rundt på grafen for å få andre punkt med tilhørende verdier eller du kan skrive inn den midterste x-verdien i selve tabellen (3). For å få fram den derivert klikker du på (4) og velger «Derivert». Ønsker du å kopiere tabellen til regnearket i GeoGebra klikker du på (5).



Figur 2.11: Under «Punkt» kan vi lese av ulike verdier til tilhørende f.

2.5 Oppgaver

Oppgave 2.13

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^4 - x^2 + x, \qquad x \in [-2,\ 3]$$

a) Tegn grafen til f.

b) Bestem funksjonenes nullpunkt og grafens ekstremalpunkt og vendepunkt.

Oppgave 2.14 — Eksamen REA3022 Matematikk R1, Våren 2009.

I denne oppgaven skal du studere fjerdegradsfunksjoner som har to vendepunkt.

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 2x^3 - 12x^2)$.

La S og T være de to vendepunktene, med S lengst til venstre på grafen.

a) Tegn grafen til f.

b) Finn $f''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S og T.

c) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S og T. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til f og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

d) Vi lar Q være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\dfrac{ST}{TQ}$.

En annen fjerdegradsfunksjon g er gitt ved $g(x) = x^4 - 6x^2$.

La S_1 og T_1 være de to vendepunktene, med S_1 lengst til venstre på grafen.

Du skal gjennomføre tilsvarende oppgaver som i a), b), c) og d):

e) 1) Tegn grafen til g.

2) Finn $g''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S_1 og T_1.

3) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S_1 og T_1. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til g og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

4) Vi lar Q_1 være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\dfrac{S_1T_1}{T_1Q_1}$.

Kommenter resultatet.

Oppgave 2.15 — Eksamen REA3028 Matematikk S2, Våren 2009.
På figuren har vi tegnet grafen til $f(x) = \frac{8}{x}$ for $x > 0$, og et rektangel $ABCD$. Punktet $A(x, f(x))$ ligger på grafen til f og til venstre for B. Punktene B og C har førstekoordinat 6, og punktene C og D har andrekoordinat 12. Se figuren.

a) Bestem lengden av linjestykkene AB og AD uttrykt ved x.

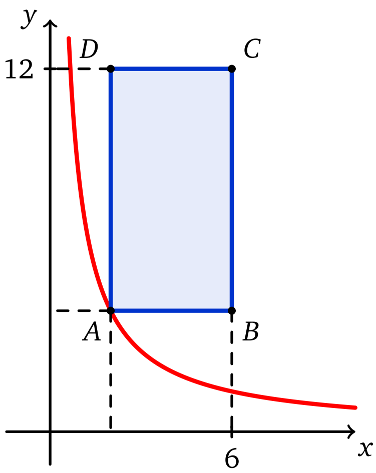
b) Vis at arealet av rektanglet kan skrives som

$$g(x) = 80 - 12x - \frac{48}{x}$$

Hva er definisjonsmengden til g?

c) Bestem det største arealet rektanglet kan få.

d) Undersøk om rektanglet med størst areal også har størst omkrets.



Oppgave 2.16
Gitt tredjegradsfunksjonen

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

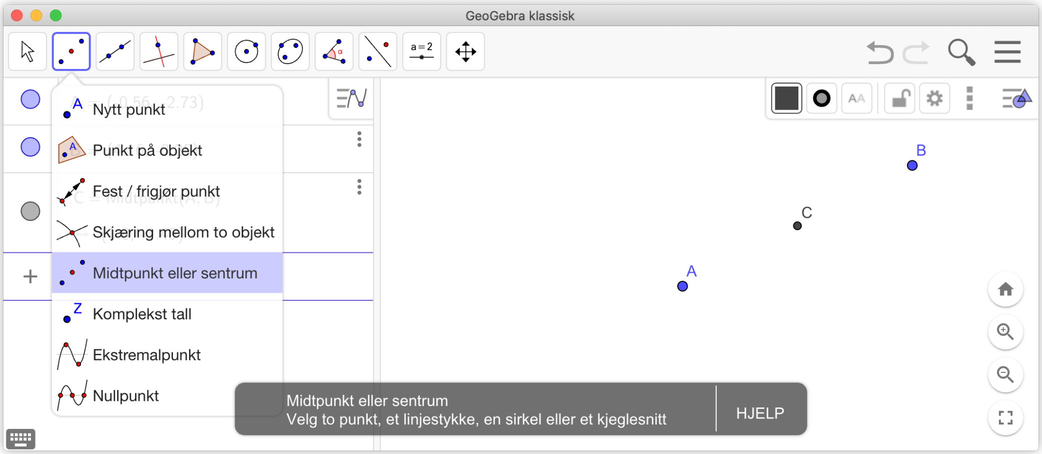
a) Finn nullpunktene til f.

b) Finn midtpunktet D til to av nullpunktene A og B og finn tangenten som tangerer f over D. Det vil si at tangenten tangerer f i $(d, f(d))$ der d er x-koordinaten til D. For å skrive inn dette punktet skriver du `(x(D), f(x(D)))` i algebrafeltet.

Du kan finne midtpunkt ved å velge verktøyet *Midtpunkt eller sentrum* .

c) Hva kan du si om denne tangenten?

Tips! Du kan finne midtpunkt til to punkt med verktøyet *Midtpunkt eller sentrum*



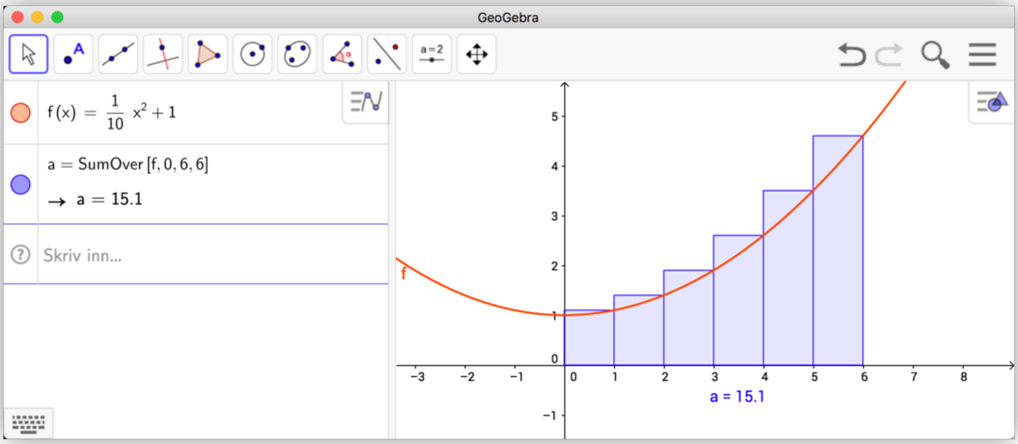
2.6 Arealet under en graf

Vi skal til slutt i dette kapittelet se hvordan vi kan bruke GeoGebra til å beregne arealet under en graf. Vi ønsker at elevene skal få en viss forståelse for hvordan vi kan finne arealet under en graf ved hjelp av Riemannsummer.

Eksempel 2.9

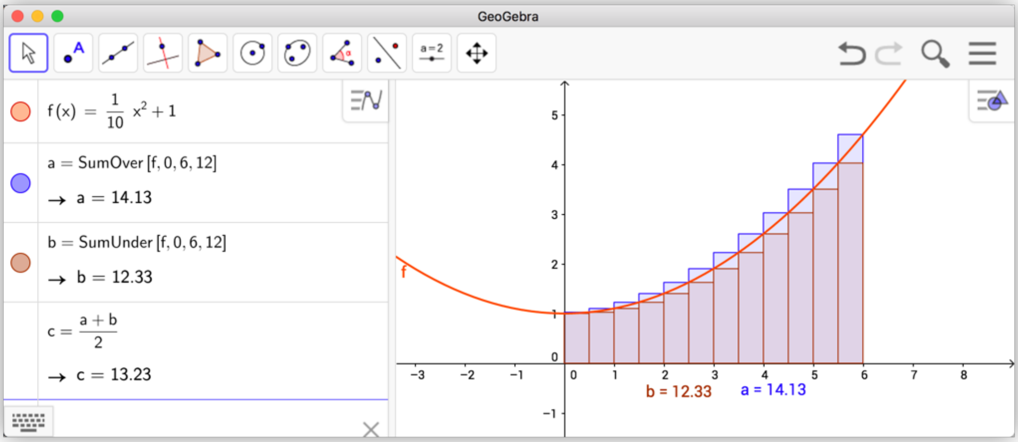
Hva er arealet under grafen til $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + 1$ fra $x = 0$ til $x = 6$?

Løsning:
Nedenfor har vi tegnet inn grafen til f. Vi har også tegnet inn en del rektangler som ligger akkurat over grafen til f. Disse gir en god tilnærming til arealet under grafen.



Figur 2.12: `SumOver[f,0,6,6]` gir en tilnærmet verdi for arealet under grafen.

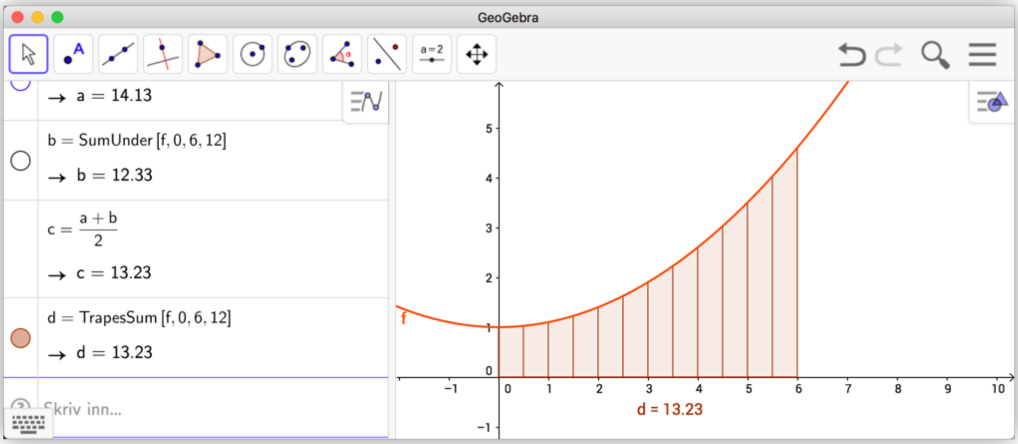
Kommandoene `SumOver(f, a, b, n)` og `SumUnder(f, a, b, n)` fungerer slik at de beregner arealet til n rektangler fra a til b som henholdsvis er tegnet over og under grafen til f. Vi kunne gjort dette enda bedre ved å ta flere rektangler. Vi kunne også beregnet arealet ved å tegne rektanglene inn slik at de ligger under grafen. På figur 2.13 har vi beregnet en tilnærmet verdi for arealet ved å bruke flere rektangler og ved å ta gjennomsnittet mellom øvre sum og nedre sum.



Figur 2.13: Kommandoen `SumOver[f,0,6,12]` og `SumUnder[f,0,6,12]` gir begge en tilnærmet verdi for arealet under grafen.

Dersom vi nå lar n i beregningene ovenfor gå mot uendelig vil differansen mellom de øvre og de nedre rektanglene gå mot null og vi finner arealet under grafen. Dette gjelder for alle stykkevis kontinuerlige funksjoner.

Vi kan også bruke kommandoen `TrapesSum(f,0,6,12)` til å finne en tilnærmet verdi til dette arealet. Denne kommandoen bruker trapeser i stedet for rektangler, som vist på figur 2.14. Vi ser at arealet er ca 13,23.

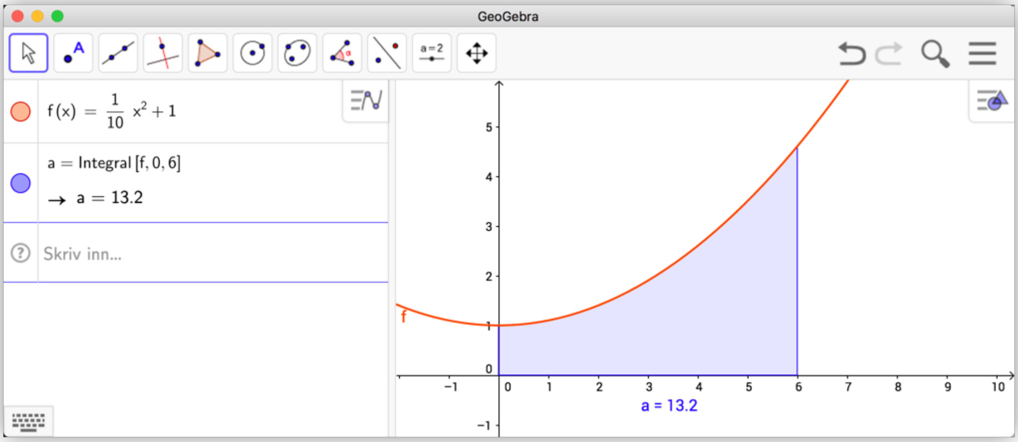


Figur 2.14: `TrapesSum[f,0,6,12]` gir en bra tilnærmet verdi for arealet.

En annen aktuell kommando vi vil nevne er `RektangelSum()`. Du finner mer informasjon om denne ved å klikke «Vis Hjelp online» i «Hjelp for inntasting».

Vi har allerede funnet en god tilnærming for dette arealet ved å bruke `SumOver` og `SumUnder`. Her vil vi bruke en kommando som heter `Integral(f, a, b)`. Denne beregner altså arealet under grafen til f fra $x = a$ til $x = b$. I dette tilfellet får vi

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 13{,}2.$$



Figur 2.15: Kommandoen `Integral[f, 0, 6]` gir oss arealet under f fra $x = 0$ til $x = 6$.

Eksempel 2.10

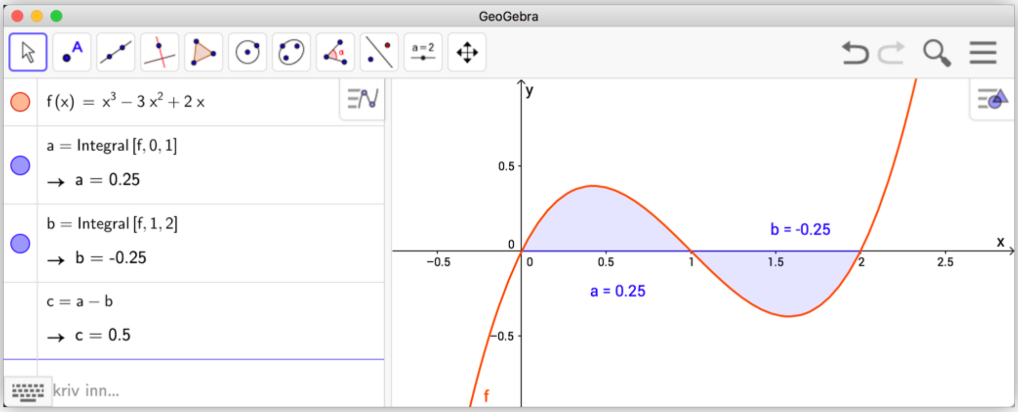
Finn arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen, $x = 0$ og $x = 2$ til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Løsning:
Vi skriver inn $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ i algebrafeltet slik at grafen blir tegnet.

Kommandoen `Integral(f, 0, 2)` gir oss i dette tilfellet 0 som svar. Kan dette stemme? Det som skjer her er at det er like stort areal som ligger over x-aksen som under. Vi må derfor dele opp integralet fra $x = 0$ til $x = 1$ og fra $x = 1$ til $x = 2$. Vi skriver derfor inn kommandoene `Integral(f, 0, 1)` og `Integral(f, 1, 2)` i algebrafeltet. Vi får da henholdsvis $a = -0{,}25$ og $b = 0{,}25$ som svar. Vi får derfor:

$$\begin{aligned}
\text{Arealet} &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0{,}25 - (-0{,}25 \\
&= 0{,}5
\end{aligned}$$



Figur 2.16: Arealet begrenset av grafen til funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, x-aksen, $x = 0$ og $x = 2$.

Vi kan også finne arealet mellom to grafer. Dersom arealet er begrenset av f, g, $x = a$ og $x = b$, så er arealet gitt ved `IntegralMellom(f, g, a, b)`.

Eksempel 2.11

Finn arealet avgrenset av grafene til funksjonene

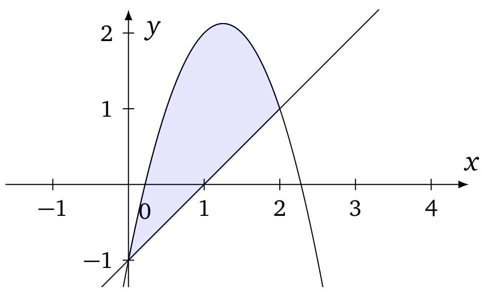
$$f(x) = -2x^2 + 5x - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = x - 1$$

Løsning:
Vi må først finne skjæringspunktene mellom grafen til f og g. Det kan vi gjøre ved å skrive inn `Skjæring(f,g)`. Vi ser da at grafene skjærer hverandre i $(0, -1)$ og $(2, 1)$.

For å finne det søkte arealet skriver vi derfor kommandoen

```
IntegralMellom(f, g, 0, 2)
```

i algebrafeltet. Vi finner at arealet er 2,67.



GeoGebra kan også regne ut ubestemte integraler. Dette gjøres ved å gi kommandoen `Integral(<funksjon>)` uten å spesifisere grensene.

Eksempel 2.12

Finn det ubestemte integralet $\int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$

Løsning:
Vi skriver inn kommandoen `Integral(x^3sin(x))` og trykker enter. Vi får da svaret i algebrafeltet, nemlig $(3x^2 - 6)\sin(x) + (6x - x^3)\cos(x)$. Det vil si at

$$\int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x = (3x^2 - 6)\sin x + (6x - x^3)\cos x + C$$