1998-99

Abel-konkurransen ~~1997–98~~

Fasit til andre runde

Oppgave 1: Vi har at $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab = 31-6 = 25$. Det følger at $a-b=5$.
A

Oppgave 2: $9991 = 10000-9 = 100^2-3^2 = (100-3)(100+3) = 97\cdot 103$. Siden 103 er et primtall blir dette den største primfaktoren. **A**

Oppgave 3: Anta at Mari har spilt n runder og totalt oppnådd A poeng. Opplysningene i oppgaven kan da uttrykkes som $A-185 = 176(n-1)$ og $A = 177n$. Setter vi den siste likningen inn i den første får vi $177n-185 = 176n-176$ som gir at $n=9$. For å øke gjennomsnittet til 178 trenger hun altså $10\cdot 178-9\cdot 177 = 178+9(178-177) = 187$ poeng i den neste runden. **D**

Oppgave 4: Observer at $128 > 7\cdot 18$. Dermed må minst en kasse inneholde mer enn 18 epler. Det er mulig å fordele eplene slik at det er 19 epler i to av kassene og 18 i hver av de øvrige, så den maksimale verdien for N blir altså 19.
E

Oppgave 5: la a og b være katetene og c hypotenusen i trekanten. Da er $a+b = 60-c$ og $a^2+b^2=c^2$. Trekantens areal kan uttrykkes både som $ab/2$ og $6c$, som gir at $ab = 12c$. Av dette får vi

$$(60-c)^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = c^2+24c.$$

Løser vi opp parentesen til venstre står vi igjen med likningen $3600 = 144c$ som gir at $c = 25$ **B**

Oppgave 6: Anta at det er det første sifferet som er størst og som dermed er summen av de to andre. Hvis det første sifferet er 9 blir det 8 muligheter for det andre, som hver gir en unik mulighet for det siste sifferet. Tilsvarende blir det 7 muligheter der det første sifferet er 8. Fortsetter vi slik får vi tilsammen $8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$ muligheter der det første sifferet er størst. Tilsvarende blir det 36 muligheter der det midterste sifferet er størst og 36 muligheter der det siste sifferet er størst. Svaret blir altså $3\cdot 36 = 108$. **E**

Oppgave 7: Med $x = y = 0$ får vi at $f(0) = 2f(0) + 1$ som gir at $f(0) = -1$. Setter vi $x = 3$ og $y = -3$ får vi nå at $f(0) = f(3) + f(-3) - 53$. Siden $f(3) = f(-3)$ gir dette at $2f(3) = f(0) + 53$, altså $f(3) = 26$. **A**

Oppgave 8: Anta at det er N jenter på festen. Totalt antall par av jenter og gutter som kjenner hverandre er da $2 \cdot 4 + (N-2) \cdot 2$. Siden ingen av de 6 guttene kjenner mer enn 3 jenter, er dette tallet høyst 18, det vil si at $8 + 2(N-2) \leq 18$ som gir at $N \leq 7$. Det er lett å se at $N = 7$ er oppnåelig, så det største mulige antall jenter er dermed 7. **B**

Oppgave 9: Trekk linjen AC og slå en sirkel med radius 5 om A. Da må B ligge på denne sirkelen. $\angle C$ er størst mulig hvis linjestykket BC tangerer denne sirkelen, noe som medfører at $\angle B = 90°$. Pythagoras gir nå at $BC = \sqrt{11}$ og arealet blir $\frac{5}{2}\sqrt{11}$. **E**

Oppgave 10: Observer først at $m^3+5m = m^3-m+6m = m(m-1)(m+1)+6m$ alltid er delelig med 3. Dermed er venstre side alltid delelig med 3, mens høyre side er på formen $3k + 1$ og er dermed aldri delelig med 3. Likningen har altså ingen heltallige løsninger. **A**