Telenor

Abel-konkurransen 1997–98

Fasit til andre runde

Oppgave 1: La a og b være antall jenter som tar hhv. tysk og fransk; la c og d være antall gutter som tar hhv. tysk og fransk. Da er $b+c=16$, $b+d=10$, $a+b=11$ og $a+c+d=16$. Ved å summere de tre første ligningene og trekke fra den siste blir $3b=21$: alltså er $b=7$. Dette gir $a+b+c+d=16+7=23$.
C

Oppgave 2: Anta først at $x-|2x+1|=3$. Dette er ekvivalent med at $x-3=|2x+1|\geq 0$. Siden dette gir $x\geq 3$ er da $x-3=|2x+1|=2x+1$. Dette gir $x=-3$, men det er ikke en løsning fordi vi også skulle ha $x\geq 3$.

Anta så at $x-|2x+1|=-3$. Da er $x+3=|2x+1|$ der vi må ha $x\geq -3$. For $2x+1\geq 0$ gir dette $x+3=2x+1$ som gir $x=2$ som løsning. For $2x+1<0$ gir dette $x+3=-2x-1$ som gir $x=-4/3$ som løsning. **C**

Oppgave 3: Vi har at $f_3(x)=x$ og at 3 deler 1998, dermed blir $f_{1998}(x)=x$.
B

Oppgave 4: Det er 16 punkter, så det er mulig å velge 3 punkter på $\binom{16}{3}=560$ forskjellige måter. Vi må så trekke fra de tilfeller der de tre punktene ligger på linje. Det finnes 10 linjer som inneholder fire punkter: de horisontale, de vertikale og de to diagonalene. Dette gir 40 degenererte trekanter. I tillegg finnes fire linjer parallelle med diagonalene som inneholder tre punkter. Antall ikke-degenererte trekanter blir dermed $560-40-4=516$. **D**

Oppgave 5: Siden x^3-koeffisienten er null er summen av løsningene lik null; for å være en aritmetisk følge må de da være $3a$, a, $-a$ og $-3a$ for en passende a. Dette gir $(x+3a)(x+a)(x-a)(x-3a)=(x^2-a^2)(x^2-9a^2)=x^4-10a^2x^2+9a^4$. Da er $m=3a^2$ og $3m+2=10a^2$, hvilket gir $a^2=2$ og dermed $m=6$.
E

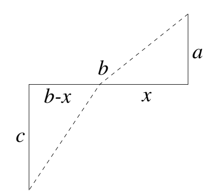
Oppgave 6: La BC og AD skjære i P. Da er trekantene PAB, PMN og PDC likeformede og arealene dermed proporsjonale med a^2, MN^2 og b^2. Siden arealet av PMN er snittet av arealene til PAB og PDC, må $MN^2=(a^2+b^2)/2$.
D

Oppgave 7: Ved å sette inn $y = mx - 1$, får vi $13x + 11my - 11 = 700$ eller $(11m + 13)x = 711$. Mulige verdier av $11m + 13$ er da $\ldots, -20, -9, 2, 13, \ldots$: tall som gir 2 (eller -9) som rest hvis de deles med 11. Siden $711 = 3^2 \cdot 79$ kan vi finne alle faktorer av 711 som gir denne resten: de eneste er 79 og -9. Disse svarer til $m = 6$ og $m = -2$. **C**

Oppgave 8: La kvadratet ha hjørner $ABCD$ der en av sirklene ligger i hjørnet A (tangerer AB og AD): sentrum i denne kalles E og ligger på AC. De to andre sirklene tangerer AC i F samt linjen BC eller CD og de har sentrum i hhv. P og Q. La sirklene ha radius r. Da er $AE = \sqrt{2}r$. Siden $EP = 2r$, $PF = r$ og EFP er rettvinklet, er $EF = \sqrt{3}r$. Høyden fra F til BC er $FQ/\sqrt{2} + r$ (r = høyden fra P til BC) hvilket gir at FC som er $\sqrt{2}$ ganger dette blir $r + \sqrt{2}r$. Vi får nå at $AC = AE + EF + FC = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{2})r$. Siden $AC = \sqrt{2}$ gir dette $r = \sqrt{2}/(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$. **E**

Oppgave 9: Vi har at $1/n(n+1)(n+2) = (1/n(n+1) - 1/(n+1)(n+2))/2$. Ved å skrive ut summen med denne regelen kanselerer alle ledd untatt $(1/1 \cdot 2)/2$ og $-(1/1997 \cdot 1998)/2$, og man får $1/4 - 1/2 \cdot 1997 \cdot 1998$. **E**

Oppgave 10: Dersom $a, c > 0$ uttrykker formellen avstanden man går dersom man går $a + c$ nedover og b bortover ved først å gå a ned og x bort og dernest c ned og $b - x$ bort: som på figuren. Korteste vei er i en rett linje, hvilket ved Pytagoras gir $\sqrt{(a+c)^2 + b^2}$.



Det ble oppdaget, men for sent, at dersom a og b har forskjellig fortegn må man bruke $|a| + |c|$ i stedet for $a + c$, og da passer ingen av alternativene. Dermed er alternativ E det rette, men det ble vedtatt under noe tvil, også å gi poeng for alternativ C. **E(/C)**