# Abel-konkurransen 1997–98

## FINALE

### 12. mars 1998

**Oppgave 1**

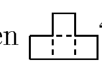
La $a_0, a_1, a_2, \ldots$ være en uendelig lang følge av positive heltall med $a_0 = 1$ og slik at for alle $i > 0$ er $a_i^2 > a_{i-1}a_{i+1}$.

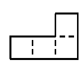
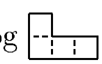
**a)** Vis at $a_i < a_1^i$ for alle $i > 1$.

**b)** Vis at $a_i > i$ for alle $i$.

**Oppgave 2**

Vi har et brett med $n \times n$ kvadratiske felter der $n$ er et positivt heltall. Dette ønsker vi å dekke med brikker av bestemte former: alle satt sammen av fire kvadrater. Brikkene skal ikke overlappe hverandre og ikke gå utenfor brettet, men kan ellers plasseres og roteres fritt.

**a)** For hvilke $n$ er det mulig å dekke brettet med figurer på formen ?

**b)** For hvilke $n$ kan man dekke brettet hvis både  og  kan brukes?

**Oppgave 3**

La $n$ være et positivt heltall.

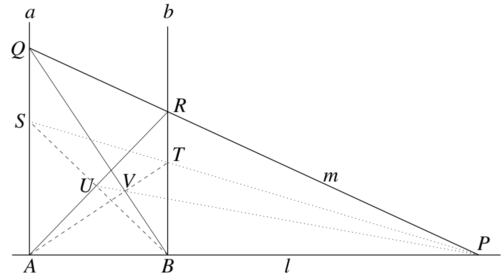
**a)** Vis at $1^5 + 3^5 + 5^5 + \cdots + (2n-1)^5$ er delelig på $n$.

**b)** Vis at $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$ er delelig på $n^2$.

**Oppgave 4**

La $l$ være en linje og la $A$, $B$ og $P$ være punkter på $l$ slik at $P$ ligger utenfor linjestykket $AB$. La $a$ og $b$ være linjene vinkelrett på $l$ gjennom henholdsvis $A$ og $B$. Trekk en linje $m$ gjennom $P$ som hverken er parallell med eller vinkelrett på $l$; $m$ skjærer da linjen $a$ i punktet $Q$ og linjen $b$ i punktet $R$.

La $S$ være punktet på $a$ slik at linjene $AR$ og $BS$ står normalt på hverandre og kall skjæringspunktet $U$. Tilsvarende, la $T$ være punktet på $b$ slik at $BQ$ og $AT$ står normalt på hverandre og kall skjæringspunktet $V$.




**a)** Vis at $P$, $S$ og $T$ ligger på en linje.

**b)** Vis at $P$, $U$ og $V$ ligger på en linje.