Abel-konkurransen 1994–95

Fasit til andre runde

Oppgave 1: Testen luker ut 20% av nøttene, men en fjerdedel av disse — 5% — er ikke tomme. Det er da 15% av nøttene som er tome og blir luket ut. De siste 5% av tomme nøtter må da passere testen. Siden totalt 80% passerer testen vil andel tomme av de som passeerte testen være $5/80 \cdot 100\% = 6\frac{1}{4}\%$. **B**

Oppgave 2: Kall hjørnene A, B, C, D, E og U etter vinklene. Summen av vinklene i trekantene ACD og UCD er begge $180°$. Dersom $v = \angle UCD$ og $w = \angle CDU$ gir dette at $a + c + v + w + d = 180°$ og $u + v + w = 180°$. Ved å kombinere de to får man at $u = a + c + d$. **E**

Oppgave 3: Dersom tallet en n-sifret er tallet minst lik 10^{n-1}, men tverrsummen er maksimalt $9n$. Dersom $n > 2$ vil $10^{n-1} > 9n$, derfor kan ikke $n > 2$. Taller kan derfor skrives $10a + b$ der $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, men ikke $a = b = 0$. Tverrsummen er $a + b$. Vi får da ligningen $10a + b = 3(a + b)$ som gir $7a = 2b$. Den eneste løsning av denne er $a = 2, b = 7$. **B**

Oppgave 4: Betegn de tre sirklene med S, S_1 og S_2. Avstanden fra sentrum i S til sentrum i S_1 er lik $1 + r$. La P være skjæringspunktet mellom linjen og normalen fra sentrum i S. Definer P_1 og P_2 tilsvarende. La $a = PP_1$ og $b = PP_2$; det gir $P_1P_2 = a + b$. Pytagoras setning gir da at avstanden mellom sentrum i S og S_1 er gitt ved $\sqrt{a^2 + (1 - r)^2}$. Dette gir $(1 + r)^2 = a^2 + (1 - r)^2$ som i sin tur gir $a = 2\sqrt{r}$. Tilsvarende utregning for S_2 gir $b^2 = 2\sqrt{2r}$. Og for avstanden mellom sentrum i S_1 og S_2 får vi $a + b = 2\sqrt{2}$. Ved å slå uttrykkene for a og b sammen til det for $a + b$ får vi $r = \frac{2}{3+2\sqrt{2}} = 6 - 4\sqrt{2}$. **D**

Oppgave 5: Dersom alle sidene er hvite er det kun en mulighet; tilsvarende dersom alle sider er sorte. Dersom nøyaktig en side er hvit (eller sort) er det også bare en mulighet. Dersom to sider er hvite (eller sorte) er det to muligheter: de to sidene kan ha en felles kant, eller de kan være motstående. Dersom det er tre hvite og tre sorte sider er det to muligheter: dersom to av de hvite sidene er motstående er det kun en mulighet for plassering av den siste, mens dersom det ikke finnes to motstående hvite sider må de tre hvite sidene møtes i et hjørne. Dette gir da 1+1+2+2+2+1+1=10 muligheter. **B**

Oppgave 6: At A og B er riktige fremkommer direkte ved innsetting i uttrykket for *. For å vise at D er riktig kan man skrive $a * b = (a - 1)(b + 1) + 1$. Da blir $(a * b) * c = ((a - 1)(b + 1) + 1) * c = (a - 1)(b + 1)(c + 1) + 1$. Herfra følger at b og c byttes om uten at det endrer resultatet, og D følger. Ved å sette inn $c = a$ i D blir

uttrykket på venstre side lik $(a * b) * a = (a * a) * b = a^2 * b$. Dermed er også C bevist.
E

Oppgave 7: La A være ett av hjørnene og la P og Q være punktene der de to sidekantene fra A tangerer sirkelen. Da må $AP = AQ$. Hvis vi deler alle sidekantene i to ved tangeringspunktet finner vi at to og to biter som møtes i et hjørne er like lange. Dersom vi summerer lengden av annenhver sidekant vil denne summen inneholde en bit fra hvert slikt par. Summen av annenhver sidekant må derfor være lik halve omkretsen. Det gi at $1+3+5 = 2+4+?$, hvilket gir at den siste siden må ha lengde 3.
B

Oppgave 8: For $x \in \mathbf{N}_0$ er $f(x) = 11 \cdot$tverrsummen av x. Siden 1995 ikke er et multiplum av 11 kan det ikke finnes noen løsning av ligningen. **A**

Oppgave 9: Enhver person kan hilse på fire andre, alternativene er derfor at de tok 0, 1, 2, 3 eller 4 personer i hånden da de kom. De fem forskjellige svarene må da være 0, 1, 2, 3 og 4. Summen av disse er 10, men totalt blir det utvekslet 12 håndtrykk. De to siste håndtrykkene må da ha blitt utvekslet da spørsmålsstilleren ankom.
C

Oppgave 10: La P være skjæringspunktet mellom AC og BD og la Q være skjæringspunktet mellom AC og SD. La $u = \angle BPC$ være den vinkelen vi skal bestemme og la $v = \angle ABP$. Siden vinkelsummen i ABP skal være $180°$ må $u = 20° + v$. Siden SBD er likebenet må også $\angle BDS = v$. Trekanten PDQ er rettvniklet og $\angle QPD = u$ slik at $u + v = 90°$. Siden $u + v = 90°$ og $u = 20° + v$ må $u = 55°$.
B

FASIT:

1: B		6: E	
2: E		7: B	
3: B		8: A	
4: D		9: C	
5: B		10: B	

BRUKSANVISNING:

Denne tabellen har samme format som svartabellen i oppgavesettet. Ved å klippe den ut og klippe ut de to spaltene kan du, ved å legge dette tablået over svaret, raskt finne ut hvor mange riktige og gale svar det er.

Dersom du har mange oppgaver å rette, burde den være hendig å bruke. Jeg håper ihvertfall det. Pass bare på i tilfelle noen har skrevet noe utenfor rutene.