Abel-konkurransen 1994
FINALE — FASIT

Oppgave 1

a) Dersom sylinderen har radius r og høyde h, så må vi ha at $\sqrt{r^2+h^2}$ er lik kulens radius: dvs. at $r^2+h^2=9$. Sylinderens volum er $V=\pi r^2 h=\pi h(9-h^2)$. Dersom vi setter inn $r=\sqrt{3}$ finner vi at $h=\sqrt{6}$ og $V=3\sqrt{6}\pi$. Vi har altså ligningen $\pi h(9-h^2)=3\sqrt{6}\pi$, eller $h^3-9h+3\sqrt{6}$. Dette er en tredjegradsligning og de er generelt vanskelige å løse, men vi kjenner en av løsningene: $h=\sqrt{6}$. Siden en av løsningene er kjent, vet vi at polynomet kan faktoriseres: $h^3-9h+3\sqrt{6}=(h-\sqrt{6})(h^2+ah+b)$. Vi finner da at $h^3-9h+3\sqrt{6}=(h-\sqrt{6})(h^2+\sqrt{6}h-3)$. Vi må derfor finne et nullpunkt for $h^2+\sqrt{6}h-3$; de er $h=-\sqrt{3/2}\pm 3/\sqrt{2}$ hvor eneste positive løsning er $h=(3-\sqrt{3})/\sqrt{2}$. Sylinderens radius blir da lik $r=\sqrt{9-r^2}=\sqrt{3(1+\sqrt{3})}$.

Dersom man løser med hensyn på r i stedet for h, får man en sjettegradsligning. Her kan man dog sette $x=r^2$ og dermed ha en tredjegradsligning i x som kan løses som for h.

b) La $\angle NAB=u$, $\angle ABN=v$ og $\angle ACN=2w$. Siden AB er diameteren i sirkelen, må $\angle BNA$ være rett. Vi ser at $\angle PQN=\angle CQB=v-w$. La O være sentrum i sirkelen. Da er $\angle NOB=180^\circ-2v$ (merk at NOB er en likebenet trekant). Siden linjen CN tangerer sirkelen er $\angle CNO$ rett. Det gir $90^\circ=\angle NOC+2w=180^\circ-2v+2w$. Av dette ser vi at $v-w=45^\circ$. Ved å bruke at trekanten er rettvinklet eller ved å gjøre samme utledning for $\angle PQN$ finner vi at $\angle NPQ=\angle PQN=45^\circ$ og dermed må trekanten PQN være likebenet.

Oppgave 2

a) Vi kan skrive ligningen $(pq+pr+qr)=pqr/n$. Dette gir at n er en divisor i pqr: $n=1,p,q,r,pq,pr,qr$ eller pqr. Dersom $n=p,q,r,pq,pr,qr$ eller pqr vil høyresiden bli mindre enn venstresiden: f.eks. $n=p$ gir $pq+pr+qr=pqr/p=qr\Rightarrow pq+pr=0$ hvilket er umulig. Altså må $n=1$. Dette gir at $pq+pr+qr=pqr$. Siden $qr=pqr-pq-pr=p(qr-q-r)$ vil p dele qr; da må q eller r være lik p. Anta at $p=q$; da kan vi sette at $p^2=pq=r(pq-p-q)$ hvilket gir at r deler p^2 som igjen vil si at $r=p=q$. Siden $p=q=r$ og $1/p+1/q+1/r=1/n=1$, må $p=q=r=3$.

b) Se på uttrykket modulo 9. Vi har at $x^3\equiv 0$ eller $\pm 1 \bmod 9$. Dersom $x^3+5y^3\equiv 0 \bmod 9$ må derfor $x^3\equiv y^3\equiv 0 \bmod 9$. Når $p\mid x^3$ og $9\mid y^3$ må $3\mid x$ og $3\mid y$. Vi kan da skrive $x=3x'$ og $y=3y'$. Da kan vi forkorte med 9 i ligningen og få $z^3=3(x'^3+5y'^3)$. Dette gir at også z er et multiplum av 3: $z=3z'$. Nå er vi tilbake til ligningen $x'^3 + 5y'^3 = 9z'^3$. Slik kan vi fortsette i det uendelige, men for et heltall ulik null vil man før eller siden få et tall som ikke er delelig med 3. Altså er $x = y = z = 0$ eneste mulige løsning.

Oppgave 3

a) La $t_1 = x_2/x_1$, $t_2 = x_3/x_2$, ..., $t_{1993} = x_{1994}/x_{1993}$. Ulikheten som skal vises kan da skrives $t_1{}^{t_1} \cdots t_{1993}{}^{t_{1993}} \geq t_1{}^{1/t_1} \cdots t_{1993}{}^{1/t_{1993}}$. Dersom vi kan vise at $t^t \geq t^{1/t}$ for alle $t > 0$ kan vi bruke det for hver t_i og gange sammen på begge sider.

For å vise at $t^t \geq t^{1/t}$ betrakter vi $t^{t-1/t}$ og ønsker å vise at denne er større enn eller lik en. Dersom $t \geq 1$ vil $t - 1/t \geq 0$ og da har vi et tall som er større eller lik en opphøyd i noe positivt, hvilket blir større enn eller lik en; dersom $t \leq 1$ vil $t - 1/t \leq 0$ og da har vi et tall mindre enn eller lik en opphøyd i noe negativt, hvilket blir større enn eller lik en. Dermed er det vist at $t^{t-1/t} \geq 1$ for alle $t > 0$.

b) Vi har at $f(f(f(x))) = f(x+1) = f(x) + 1$. Dersom $f(0) = a$, gir $f(x+1) = f(x) + 1$ at $f(x) = a + x$ for alle x. Det gir at $f(f(x)) = x + 2a$. For at $f(f(x)) = x + 1$ må da $2a = 1$ hvilket er umulig da $a = f(0)$ skulle være et heltall.

Oppgave 4

a) Dersom hver person sender 10 brev blir det sent ialt 200 brev. Antall par av personer er $20 \cdot 19/2 = 190$. Dersom intet par sender brev gjensidig (ett brev hver vei), kan det sendes maksimalt ett brev for hvert par av personer: altså maksimalt 190 brev. Siden det sendes flere enn 190 brev, må det finnes et par av personer som seg imellom sender to brev: ett brev hver vei.

b) Anta at x er den byen som kan nås fra flest andre byer. Dersom x ikke kan nås fra alle, er det en by y slik at det er umulig å komme fra y til x. Men, da må det være mulig å komme fra x til y. Da kan y nås fra alle byer hvorfra x kan nås og i tillegg fra x: y kan altså nås fra flere byer enn x, hvilket strider imot forutsetningene. Antagelsen om at x ikke kan nås fra alle byer må derfor være gal.

En by hvorfra alle andre kan nås kan finnes ved å finne den byen hvorfra flest mulig andre byer kan nås. Ressonementet er som over, men hvor retningen av veiene er endret.