Abel-konkurransen 1993

Fasit til første runde

Oppgave 1: Vi løser for $\frac{1}{1-x}$ og finner at $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$. Da må $x = -1$. **B**

Oppgave 2: Sidelengdene økes med en faktor $1 + \frac{p}{100}$ og minkes med en faktor $1 - \frac{p}{100}$. Arealet endres da med en faktor $(1 + \frac{p}{100})(1 - \frac{p}{100}) = 1 - (\frac{p}{100})^2 = 1 - \frac{1}{100}$. Altså må $p = 10$. **D**

Oppgave 3: Trekanten ADE er likebent og $\angle DAE = 90° + 60° = 150°$. Da må $\angle AED = \angle ADE = 15°$. **C**

Oppgave 4: Siden $(\sqrt{2})^6 = 8$ og $(\sqrt[3]{3})^6 = 9$, må $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. Fordi $3-\sqrt{6} < 3-\sqrt{4} = 1$, kan det alternativet utelukkes. Til sist har vi $1 + \frac{1}{\pi} < 1 + \frac{1}{3}$ og $(1 + \frac{1}{\pi})^2 < \frac{16}{9} < 2$. Følgelig er $1 + \frac{1}{\pi} < \sqrt{2}$. Det største tallet er altså $\sqrt[3]{3}$. **B**

Oppgave 5: Ligningen $y = 2xy$ gir at $y = 0$ eller $2x = 1$. Hvis $x = \frac{1}{2}$, gir $x = x^2 + y^2$ at $y^2 = \frac{1}{4}$. Dette gir $y = \frac{1}{2}$ eller $y = -\frac{1}{2}$. Dersom $y = 0$, får vi at $x = x^2$. Da må $x = 0$ eller $x = 1$. Vi har altså fire løsninger: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, 0)$ og $(1, 0)$. **E**

Oppgave 6: Ved å summere de tre ligningene får vi at $(2x-y)+(2y-z)+(2z-x) = x+y+z = 6$. **E**

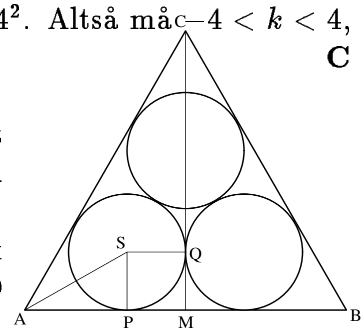
Oppgave 7: For å finne $a_7 + \cdots + a_0$ setter vi inn $x = 1$ i uttrykket for $(3x-1)^7$. Vi får da at summen blir $2^7 = 128$. **E**

Oppgave 8: Ved å opphøye i annen potens får vi $\frac{4(2+6+4\sqrt{3})}{9(2+\sqrt{3})} = \frac{16(2+\sqrt{3})}{9(2+\sqrt{3})} = (\frac{4}{3})^2$. **D**

Oppgave 9: Ved å sette $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ blir $g(x) = \frac{1}{2}$. Det gir $f(\frac{1}{2}) = f\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 1$. **B**

Oppgave 10: La $y = x^2 + x$. Ved å gange begge sider av ligningen med y får vi $y^2 + y - 156 = (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{625}{4} = 0$. Denne ligningen gir $x^2 + x = y = \frac{-1 \pm 25}{2}$. Den eneste av disse to som har reelle løsninger, er $x^2 + x = 12$. Denne har løsningene $\frac{-1 \pm 7}{2}$, altså 3 og -4. Summen av disse blir -1. **C**

Oppgave 11: Vi har at $x(k-x)-4=-(x-\frac{k}{2})^2+\frac{k^2}{4}-4$. Denne har nullpunkter når $\frac{1}{4}k^2 \geq 4$. Vi søker altså den minste hele k slik at $k^2 < 4^2$. Altså må $-4 < k < 4$, hvilket gir $k=-3$ som minste verdi. **C**

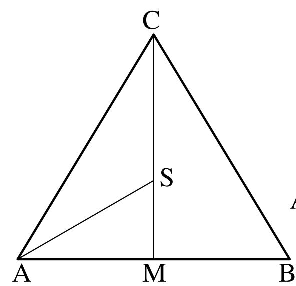


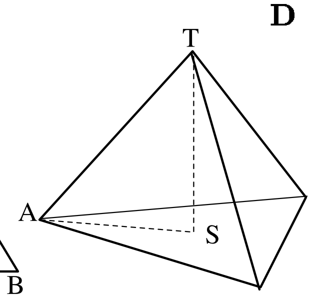
Oppgave 12: Trekanten APS er en $30°$–$60°$–$90°$ trekant der $SP = 3$. Vi får derfor at $AS = 6$ og $AP = 3\sqrt{3}$. Siden $PM = SQ = 3$, blir da $AM = AP + PM = 3 + 3\sqrt{3}$. AM utgjør en sjettedel av omkretsen, altså er omkretsen lik $18 + 18\sqrt{3}$. **D**

Oppgave 13: A sier at B er en hund, altså må A og B være like: enten er begge hunder eller så er begge ulver. C sier at D er en ulv, altså er C og D forskjellige. E sier at A er en hund, altså må A og E være like. B sier at C er en ulv, så B og C må være forskjellige. Vi vet nå at $A = B = E$, $C \neq D$ og $B \neq C$. Siden B og D begge er forskjellige fra C, må $B = D$: $A = B = D = E \neq C$. Ifølge D er B og E forskjellige. Det er galt, altså må D være en ulv. Siden D er en ulv og $A = B = D = E$, må alle disse fire være ulver, mens $C \neq D$ gir at C er en hund. Det er altså fire ulver blant de fem. **D**

Oppgave 14: La a være det totale volumet og x være volumet med syre i den opprinnelige blandingen. Når man tilsetter 1 liter vann, får man en 20% blanding: $\frac{x}{a+1} = \frac{1}{5}$. Ved å tilsette 1 liter syre blir blandingen $33\frac{1}{3}\%$ syre: $\frac{x+1}{a+2} = \frac{1}{3}$. Dette gir to ligninger: $a+1 = 5x$ og $a+2 = 3(x+1)$. Disse gir løsningen $x = 1$, $a = 4$ som gir konsentrasjonen $\frac{x}{a} = \frac{1}{4} = 25\%$. **D**

Oppgave 15: Grunnflaten er en likesidet trekant med sidelengde 6. Denne har høyde $CM = 3\sqrt{3}$ og areal $G = 9\sqrt{3}$. Siden ASM er en $30°$–$60°$–$90°$ trekant, er $AS = CS = 2SM$. Fra $CM = CS + SM$ følger da $AS = CS = 2\sqrt{3}$.



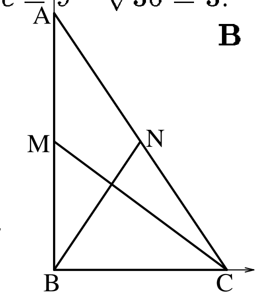


Nå vet vi at $AS = 2\sqrt{3}$ og at $AT = \sqrt{15}$. Siden trekanten AST er rettvinklet, kan vi bruke Pythagoras setning for å finne høyden $h = ST = \sqrt{AT^2 - AS^2} = \sqrt{3}$. Volumet av en slik pyramide er $V = \frac{1}{3}hG = 9$. **A**

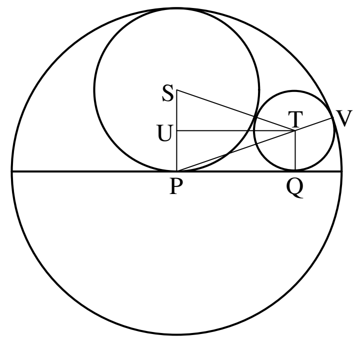
Oppgave 16: $72 \otimes 8 = 72 \cdot 64 \cdots 8$ og $18 \otimes 2 = 18 \cdot 16 \cdots 2$. Vi ser at $\frac{72}{18} = \frac{64}{16} = \cdots = \frac{8}{2} = 4$. Derfor blir $\frac{72 \otimes 8}{18 \otimes 2} = \frac{72 \cdot 64 \cdots 8}{18 \cdot 16 \cdots 2} = 4^9$. **D**

Oppgave 17: Ved å bruke linjen mellom $(1,1)$ og $(9,1)$ som grunnlinje finner vi at trekanten har grunnlinje 8 og høyde 1. Det gir areal lik 4. Hvis vi kutter trekanten med linjen $x = c$, kan vi finne arealet av den høyre delen på samme måte: grunnlinjen får lengde $9-c$ og høyden blir $\frac{1}{9}(9-c)$ fordi den skrå linjen har stigningstall $\frac{1}{9}$. Arealet av denne biten blir da $\frac{1}{18}(9-c)^2$. For at dette arealet skal bli 2, må $c = 9 - \sqrt{36} = 3$.

B



Oppgave 18: Vi legger trekanten inn i et koordinatsystem med B i origo, $C = (1, 0)$ og $A = (0, a)$. Da er $M = (0, \frac{1}{2}a)$ og $N = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$. Linjene BN og CM har stigningstall a og $-\frac{a}{2}$. Linjene står normalt på hverandre når produktet av stigningstallene er -1: Det skjer når $a = \sqrt{2}$. Da er $M = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ hvilket gir $CM = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **E**



Oppgave 19: Hvis sirkelen L har radius R, har K radius $2R$. La r være radien til M. Vi får da at $ST = R + r$ og at $SU = SP - UP = R - r$. Dette gir at $UT^2 = ST^2 - SU^2 = 4Rr$. Vi har også at $PT = PV - TV = 2R - r$ og at $PT^2 = PQ^2 + TQ^2 = UT^2 + r^2 = 4Rr + r^2$. Dette gir at $PT^2 = 4Rr + r^2 = (2R - r)^2$ som har løsningen $r = \frac{1}{2}R$. Da er radien til K fire ganger så stor som radien til M. Arealet til K blir da 16 ganger arealet til M. **C**

Oppgave 20: Ligningen kan skrives $(a+1)(b+1)(c+1) = 1001$. Tallet 1001 kan faktoriseres i primtall: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Altså må a, b og c være tallene 6, 10 og 12. $a + b + c = 28$. **A**

FASIT:

1:	B		11:	C	
2:	D		12:	D	
3:	C		13:	D	
4:	B		14:	D	
5:	E		15:	A	
6:	E		16:	D	
7:	E		17:	B	
8:	D		18:	E	
9:	B		19:	C	
10:	C		20:	A	

BRUKSANVISNING:

Denne tabellen har samme format som svartabellen i oppgavesettet. Ved å klippe den ut og klippe ut de to spaltene kan du, ved å legge dette tablået over svaret, raskt finne ut hvor mange riktige og gale svar det er.

Dersom du har mange oppgaver å rette, burde den være hendig å bruke. Jeg håper ihvertfall det. Pass bare på i tilfelle noen har skrevet noe utenfor rutene.