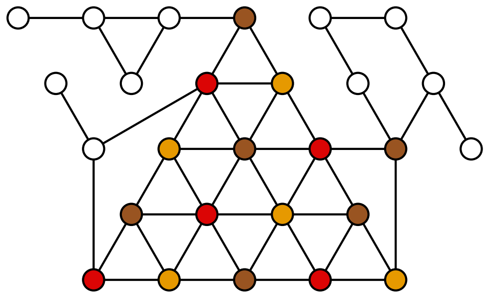
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Finale 2019–2020 – *Løsninger*

3. mars 2020

Oppgave 1.

a. Vi observerer følgende: *Gitt* et fargevalg for to nabonoder, er fargen for enhver felles nabo til de to entydig gitt. Det betyr at den store trekanten i figuren, med $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ noder, bare kan fargelegges på en av seks mulige måter: Som vist i figuren, eller med fargene permutert.



Til venstre i figuren er det en ufarget node som har to røde naboer. Den kan da fargelegges med en av de to andre fargene.

Den lille trekanten opp til venstre kan farges på fire måter: Det er to valg for noden med en brun nabo, og deretter to valg for de to andre nodene.

Oppe til høyre har vi en sykel med fem noder. Vi kan telle opp fargeleggingene av den eksplisitt, eller henvise til løsningen av punkt **b**, som gir $a_5 = 2^5 - 2 = 30$ muligheter. Men siden en av nodene allerede må være brun, gjenstår bare $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ muligheter.

Til sist har vi tre noder som henger fast i resten av grafen med bare én kant. De kan fargelegges på to måter hver, tilsammen $2^3 = 8$ måter.

Produktet av valgmulighetene vi har funnet gir at det er $6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 8 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 3840$ mulige fargelegginger.

b. La a_n være antall løsninger for en gitt n. Direkte opptelling gir $a_2 = a_3 = 6$ (tre muligheter for den første plassen, to muligheter for den neste – og ingen flere valgmuligheter når $n = 3$). Anta at $n \geq 4$.

For enkelhets skyld skriver vi A for plassen til Kong Arthur, og A', A'', A''' for de neste plassene til høyre for kongens plass. Vi har to muligheter:

– A og A'' får samme farge. Det kan vi få til slik: Se bort fra A' og A'', regn A''' som nabo til A, og legg ut servietter på en av a_{n-2} måter. Gi så A' en av de to fargene forskjellig fra A, og A'' samme farge som A. Til sammen gir dette $2a_{n-2}$ muligheter.

– A og A'' får forskjellig farge. Dette kan vi få til ved å se bort fra A' og regne A'' som nabo til A. Legg ut serviettene på en av a_{n-1} måter. Deretter er det bare én mulig farge for A'.

Dette gir rekursjonsformelen $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Den holder også for $n = 3$ dersom vi setter $a_1 = 0$ (dette forenkler videre regning litt). Den kan løses ved hjelp av karakteristiske polynomer, eller direkte ved å legge til a_{n-1} på begge sider: $a_n + a_{n-1} = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$ gir jo $a_n + a_{n-1} = 2^{n-2}(a_2 + a_1) = 2^{n-2} \cdot 6$ for $n \geq 2$. Videre blir

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n + a_{n-1}) - (a_{n-1} + a_{n-2}) + (a_{n-2} + a_{n-2}) - \cdots \pm a_1 \\ &= \left(2^{n-2} - 2^{n-3} + 2^{n-4} - \cdots + (-1)^n\right) \cdot 6 = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} \cdot 6 \\ &= 2^n + (-1)^n \cdot 2. \end{aligned}$$

Oppgave 2.

a. Det er klart at vi må ha $a_j < k$, ellers blir venstresiden for stor. Dersom $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = k-1$ og $a_j < k-1$ for $j > m$, blir fortsatt venstresiden for stor dersom $m \geq k$. Men om $m \leq k-1$, blir

$$\begin{aligned} a_1! + \cdots + a_{k+1}! &\leq m \cdot (k-1)! + (k+1-m) \cdot (k-2)! \\ &= \left((k-2)m + k + 1\right) \cdot (k-2)! \\ &\leq \left((k-2)(k-1) + k - 1\right) \cdot (k-2)! \\ &= k! - (k-3) \cdot (k-2)! < k! \quad \text{dersom } k > 3. \end{aligned}$$

Dermed trenger vi bare undersøke $k = 1, 2$ og 3. De to første gir ingen løsning, men $1! + 1! + 2! + 2! = 6 = 3!$ viser at $k = 3$ er (eneste) løsning.

b. Antagelsen gir

$$a^2 - b^2 = (c^2 - a)^2$$

med heltallig c. Skriv $d = \gcd(a, b)$, slik at $a = da_1$ og $b = db_1$ med a_1 og b_1 innbyrdes primiske. Vi finner da

$$d^2(a_1 + b_1)(a_1 - b_1) = (c^2 - a)^2.$$

Anta at a og b har motsatt paritet. Da er d et oddetall, og $a_1 + b_1$ og $a_1 - b_1$ er også oddetall og innbyrdes primiske (en felles faktor i de to måtte dele både summen $2a_1$ og differensen $2b_1$). Det følger at $a_1 + b_1$ og $a_1 - b_1$ begge er kvadrattall. La oss si $a_1 + b_1 = x^2$ og $a_1 - b_1 = y^2$, med x og y odde, og dermed

$$dxy = c^2 - a.$$

Nå er $a = da_1 = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2)$, og setter vi inn det ovenfor og rydder, får vi

$$\tfrac{1}{2}d(x + y)^2 = c^2.$$

Men d er et oddetall, så en opptelling av toerpotenser på de to sidene gir en motsigelse.

Oppgave 3. Polynomet $p(x) = x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot \dots \cdot (x-1009)^2$ har nullpunkter i $x = 0, 1, \dots, 1009$. Vi vil vise at det finnes (minst) to løsninger i hvert av intervallene mellom disse, altså i $(n-1, n)$ for $n = 1, 2, \dots, 1009$, i tillegg til to med henholdsvis $x < 0$ og $x > 1009$. Det blir til sammen $2 \cdot 1009 + 2 = 2020$. Siden ligningen er en polynomligning av grad 2020, kan den ikke ha flere løsninger enn det.

Det holder å vise at det finnes minst ett punkt x i hvert intervall $(n-1, n)$ $(n = 1, 2, \dots, 1009)$, i tillegg til to punkter med henholdsvis $x < 0$ og $x > 1009$, der $p(x) > c$. De to spesialtilfellene er opplagte fordi $p(x)$ går mot uendelig når x går mot $\pm\infty$.

Midtpunktet i $(n-1, n)$ er $x_n = n - \frac{1}{2}$. Vi finner $p(x_{n+1}) = p(x_n + 1)$, og

$$\frac{p(x_{n+1})}{p(x_n)} = \frac{(x_n+1)^2}{(x_n - 1009)^2} = \left(\frac{x_n + 1}{1009 - x_n}\right)^2$$

(resten av faktorene forkortes mot hverandre), slik at

$$p(x_1) > \dots > p(x_{504}) > p(x_{505}) < p(x_{506}) < \dots < p(x_{1009})$$

For hver n er derfor

$$\begin{aligned} p(x_n) \geq p(x_{505}) = p\left(\frac{1009}{2}\right) &= \underbrace{\left(\frac{1009}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1007}{2}\right)^4 \cdot \dots \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}_{505 \text{ faktorer}} \\ &= \frac{(1009 \cdot 1007 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1)^4}{2^{2020}} > c. \end{aligned}$$

I første linje har vi slått sammen faktorene i uttrykket for $p(x)$ to i gangen, utenfra og inn.

Oppgave 4.

a. La A' være midtpunktet på BC. Så vil AA' og CC' møtes i massesenteret M, og $AM/MA = 2$. Anta at $A' \neq D$. Siden nå $AE/AD = \frac{2}{3} = AM/AA'$, er de to trekantene EAM og DAA' likeformede (felles toppvinkel i A og samme sideforhold). Det følger at $EM \parallel DA'$, som er feil (forlengelsen av de to linjestykkene møtes i C).

b. Her er det kanskje enklest å resonnere baklengs: Påstanden som skal bevises, er ekvivalent med at trekantene CBF og OBE er likeformede. Ettersom O er midtpunktet på BC, må vi vise at E er midtpunktet på BF.

Betrakt nå trekanten CBF. Siden FO er en median i den trekanten, er det nok (ved punkt **a**) å vise at $CQ/QE = 2$.

Fordi $\angle CAD$ er rett og O er midtpunktet på AB, er D midtpunktet på AC, slik at $AC = 2AD = 2AE$. Fordi Q ligger på vinkelhalveringslinjen til $\angle CAE$, følger det fra vinkelhalveringssetningen at $CQ/QE = 2$, og beviset er ferdig.