Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2018–2019 – *Løsninger*

8. november 2018

Oppgave 1. Svaret blir $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. . . . . **D**

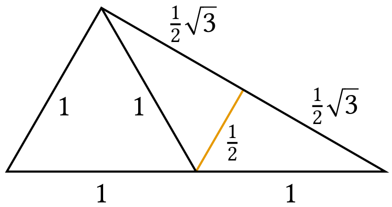
Oppgave 2. Arealet er $\pi \cdot 1^2 = \pi = \tau/2$. . . . . **B**

Oppgave 3. Pytagoras gir at den lange staven har lengde $L = K\sqrt{2^2 + 1^2} = K\sqrt{5}$. På samme måte er diagonalen i det store rektangelet $L\sqrt{5} = 5K$, så fem korte staver passer akkurat på diagonalen. . . . . **B**

Oppgave 4. $2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}\bigl(\sqrt{2} + 1\bigr) = \sqrt{2}\bigl(1 + \sqrt{2}\bigr)$. . . . . **C**

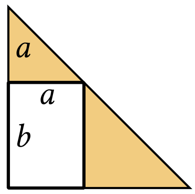
Oppgave 5. Den gitte ligningen kan skrives $2^{x-4}(2^5 + 1 - 2^3) = 5^2$, det vil si $2^{x-4} \cdot 25 = 25$. Løsningen krever $2^{x-4} = 1$, altså $x = 4$. . . . . **E**

Oppgave 6. Trekanten til venstre er likesidet, så alle vinklene er 60°. Den stumpe vinkelen i trekanten til høyre er derfor $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Vinkelhalveringslinjen til den vinkelen er midtnormal til den ukjente siden, og deler trekanten til høyre i to kongruente trekanter med vinkler 30°, 60° og 90°. Forholdet mellom den lengste kateten og hypotenusen i en slik trekant er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, og den ukjente siden har derfor lengde $2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$. . . . . **C**



Oppgave 7. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 209 = 11 \cdot 19$ er ikke et primtall. (Alle de andre er primtall.) . . . . **E**

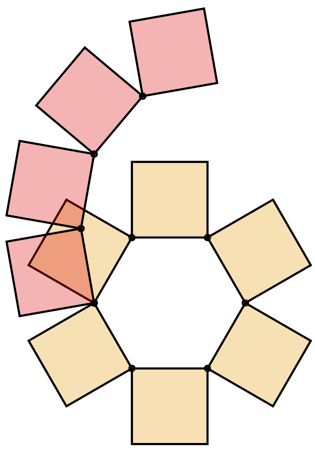
Oppgave 8. Vi har $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Vi kan klassifisere faktoriseringene etter hvor mange av de fire primfaktorene forekommer i hver av de tre faktorene. Fordelingen $(4, 0, 0)$ går ikke, for da er to av faktorene lik 1, og dermed lik hverandre. $(3, 1, 0)$ gir fire muligheter: én for hvert valg av faktoren som står for seg selv. De andre mulighetene er $(2, 1, 1)$ og $(2, 2, 0)$. $(2, 1, 1)$ gir $\binom{4}{2} = 6$ muligheter: én for hvert valg av de to faktorene som står sammen. Og $(2, 2, 0)$ gir tre muligheter: én for hver av primfaktorene som skal stå sammen med primfaktoren 2. I alt har vi $4 + 6 + 3 = 13$ muligheter. Den fullstendige listen er: $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 7 \cdot 1$, $(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 5 \cdot 1$, $(2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 3 \cdot 1$, $(3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 2 \cdot 1$; $(2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 7$, $(2 \cdot 5) \cdot 3 \cdot 7$, $(2 \cdot 7) \cdot 3 \cdot 5$, $(3 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 7$, $(3 \cdot 7) \cdot 2 \cdot 5$, $(5 \cdot 7) \cdot 2 \cdot 3$; $(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 7) \cdot 1$, $(2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 7) \cdot 1$, $(2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 1$. . . . . **D**



Oppgave 9. Katetene i den store trekanten har lengde 12. Skriv a og b for sidene til rektangelet. De to katetene i den minste trekanten er like lange, og det følger at $a + b = 12$. Rektangelet har areal $ab = 72 - 40 = 32$. Det følger at a og b er løsningene til ligningen $x^2 - 12x + 32 = 0$, som er 4 og 8. **B**

Oppgave 10. Du legger 2^{n-1} flere erter i glass nummer n enn i glass nummer $n - 1$. Det betyr at glass nummer n skal ha $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ erter (sum av geometrisk rekke). . . . . **E**

Oppgave 11. Vi kan sette sammen en gruppe på fem på $\binom{13}{5} = 1287$ måter. Men av disse er det $\binom{6}{5} = 6$ kombinasjoner med bare gutter, og $\binom{7}{5} = 21$ kombinasjoner med bare jenter. Så gruppen kan settes sammen på $1287 - 6 - 21 = 1260$ måter. . . . . **B**

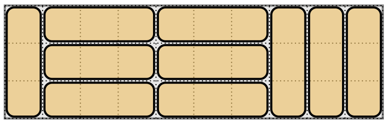


Oppgave 12. Rotasjonen gjør at det dannes en likesidet trekant mellom kvadratene, så rotasjonsvinkelen er 60°. Dermed blir vinkelen mellom de to nederste kvadratsidene 120°. Dette er akkurat vinkelen mellom to sider i en regulær sekskant, så de seks nederste kvadratsidene danner en regulær sekskant etter rotasjonen, og det sjuende kvadratet vil overlappe med det første. Dermed må vi fjerne de siste fire kvadratene, og står tilbake med de seks første. (I figuren er de siste fire rotasjonene bare påbegynt. Om vi hadde fullført dem, ville de fire siste kvadratene havnet direkte oppå de fire første.) . . . . **B**

Oppgave 13. Man kan ikke lage summen 20, siden tre mynter blir for mye og to blir for lite. Men man kan lage $21 = 7+7+7$, $22 = 7+7+8$, $23 = 7+7+9$, $24 = 7+8+9$, $25 = 7+9+9$, $26 = 8+9+9$ og $27 = 9+9+9$, og alle større summer kan lages ved å legge et antall 7-kroninger til en av disse sju summene. . . **C**

Oppgave 14. Poengsummen med r rette og b blanke besvarelser er altså $p = 5r + b$. Det er gitt at $r + b \le 20$, og $r \ge 0$, $b \ge 0$ selvsagt. Dersom $b \ge 5$ kan vi erstatte (r, b) med $(r + 1, b - 5)$ og få samme poengsum. Derfor trenger vi bare telle opp mulige poengsummer med $0 \le b \le 4$. Gitt en slik b har vi $21 - b$ muligheter for r ($r = 0, \ldots, 20 - b$), så i alt er det $21 + (21 - 1) + (21 - 2) + (21 - 3) + (21 - 4) = 105 - (1 + 2 + 3 + 4) = 95$ mulige poengsummer. . . . . **C**

Oppgave 15. Vi kan sette noen brikker på tvers. Mellom disse brikkene kan vi ikke annet enn sette brikker tre og tre i lengderetningen over hverandre. Om vi har a brikker på tvers og b slike blokker à tre brikker hver, må vi ha $a + 3b = 10$. Disse kan så plasseres på $\binom{a+b}{b}$ måter. Vi har dermed for $a = 1$, $b = 3$: $\binom{4}{3} = 4$ muligheter; for $a = 4$, $b = 2$: $\binom{6}{2} = 15$ muligheter; for $a = 7$, $b = 1$: $\binom{8}{1} = 8$ muligheter; og for $a = 10$, $b = 0$: 1 mulighet; tilsammen $4 + 15 + 8 + 1 = 28$ muligheter. . . . . **A**



Oppgave 16. Fordi $x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2 - 2$, er $x^2 + 1/x^2$ et heltall dersom $x + 1/x$ er heltall. Så vi trenger bare sjekke $x + 1/x$. Ligningen $x + 1/x = n$ er ekvivalent med $x^2 - nx + 1 = 0$, med løsning $x = n/2 \pm \sqrt{n^2/4 - 1}$. For $n = 2$ finnes én løsning, mens for $n > 2$ er det to løsninger, med produkt lik 1. Skriv x_+ for den største løsningen. Fordi $x_+ + 1/x_+ = n$ og $1/x_+ < 1$, er $n - 1 < x_+ < n$, så $x_+ < 5$ når $n \le 5$, og $x_+ > 5$ når $n \ge 6$. Det finnes altså to løsninger for hver av $n = 3$, 4 og 5 i tillegg til den ene for $n = 2$, i alt 7 løsninger. . . . . **D**

Oppgave 17. Skriv $\lfloor x \rfloor$ for det største heltall mindre enn eller lik x. Antall partallsfaktorer i 2018! er $\lfloor \frac{2018}{2} \rfloor = 1009$. Når disse toerfaktorene er satt til side, vil tallene som opprinnelig var delelig med 4 fremdeles være partall. Disse gir $\lfloor \frac{2018}{4} \rfloor = 504$ nye toerfaktorer. Vi fortsetter med å legge til toerfaktorer for tallene delelig med 8, 16, osv. Antall slike faktorer er lik forrige antall delt på 2 og rundet av nedover. Totalt antall toerfaktorer blir derfor

$$\left\lfloor \frac{2018}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{16} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2018}{1024} \right\rfloor$$
$$= 1009 + 504 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2011$$

. . . . **D**

Oppgave 18. Dersom n er et oddetall, er $3^n - n^2$ et partall. Eneste partall som også er primtall er 2, og det får vi med $n = 1$, men ikke med noen større n, for om $n \geq 2$, så er $3^n > n^2 + 2$. (Det kan vises ved induksjon: Det er sant for $n = 2$, og om det er sant for en gitt n, så er også $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(n^2 + 2) = (n+1)^2 + 2n(n-1) + 5 > (n+1)^2 + 2$.)

På den annen side, om $n = 2m$, er $3^n - n^2 = 3^{2m} - (2m)^2 = (3^m - 2m)(3^m + 2m)$, som sikkert ikke er et primtall om ikke $3^m - 2m = 1$, som vi får med $m = 1$. Det tilsvarer $n = 2$, og $3^2 - 2^2 = 5$ er et da også et primtall. For $m \geq 2$ kan vi bruke ulikheten fra første del: $3^m > m^2 + 2 > 2m + 1$, så $3^m - 2m > 1$, og dermed får vi ikke flere primtall enn de to vi har funnet. .... **B**

Oppgave 19. Grafen til f er en linje gjennom $(0, b)$ og $(d, 0)$, mens grafen til g er en linje gjennom $(0, d)$ og $(b, 0)$. Om du speiler de to første punktene gjennom linjen $y = x$, får du de to andre punktene (i motsatt rekkefølge). Dermed er de to linjene også speilbilder av hverandre gjennom linjen $x = y$.
.... **D**

Oppgave 20. Start med å se på én by, for eksempel hovedstaden, representert ved den midterste prikken i figuren. Fra hovedstaden er det direkterute til maksimalt tre andre byer, og hver av disse tre byene har direkterute til maksimalt to byer i tillegg til hovedstaden. De heltrukne linjene i figuren viser direkterutene mellom disse ti byene. Det kan altså ikke være flere enn ti storbyer i landet. Om vi legger til direkteruter mellom de seks ytterste byene som vist med de stiplede linjene i diagrammet, er betingelsene oppfylt, så det er mulig at det er så mange som ti byer i landet. .... **C**