Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Finale 2018–2019 – *Løsninger*

5. mars 2019

Oppgave 1. Vi kan tenke på opptjente poeng som en sum av to typer poeng: Radpoeng og kolonnepoeng. Når du setter et kryss i en rad med i kryss fra før, får du i radpoeng. Totalt får du da $0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$ radpoeng fra denne raden. Fra alle n rader får du $n^2(n-1)/2$ radpoeng. På samme måte får du $n^2(n-1)/2$ kolonnepoeng, og dermed i alt $n^2(n-1)$ poeng totalt, uavhengig av i hvilken rekkefølge du setter kryssene.

Oppgave 2. Først legger vi merke til at for $m = 1$, er $mn - 1 = n - 1 \mid n^3 - 1$ (fordi $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$). Og dersom $n = 1$, er $n^3 - 1 = 0$, og alle tall går opp i 0. Så alle tallpar (m, n) med $m = 1$ *eller* $n = 1$ oppfyller kravene i oppgaven.

Når vi skal undersøke andre muligheter, kan vi altså anta $m > 1$ og $n > 1$.

Dersom $m = n^2$, er betingelsen oppfylt (den blir $n^3 - 1 \mid n^3 - 1$), og dersom $n = m^2$, er den også oppfylt (den blir $m^3 - 1 \mid m^6 - 1$, som er sann fordi $m^6 - 1 = (m^3 - 1)(m^3 + 1)$).

Den gitte betingelsen gir i tur og orden:

$$\begin{aligned}
&mn - 1 \mid n^3 - 1, && mn - 1 \mid m(n^3 - 1) = (mn-1)n^2 + (n^2 - m),\\
&mn - 1 \mid n^2 - m, && mn - 1 \mid m(n^2 - m) = (mn-1)n + (n - m^2),\\
&mn - 1 \mid n - m^2, && mn - 1 \mid m(n - m^2) = (mn-1) + (1 - m^3),\\
&mn - 1 \mid m^3 - 1.
\end{aligned}$$

Siden vi nå antar at $n > 1$, gir $mn - 1 \mid n^3 - 1$ at $mn - 1 \le n^3 - 1$, så $m \le n^2$. På samme måte gir antagelsen $m > 1$ sammen med $mn - 1 \mid m^3 - 1$ at $n \le m^2$.

Anta nå at $m < n^2$. Da gir $mn - 1 \mid n^2 - m$ oss ulikheten $mn - 1 \le n^2 - m$, altså $mn \le n^2 - m + 1 < n^2$, så $m < n$. Dersom også $n < m^2$, får vi på samme måte $n < m$, som er en motsigelse. Det er derfor ikke flere muligheter enn de vi allerede har funnet.

Oppgave 3.

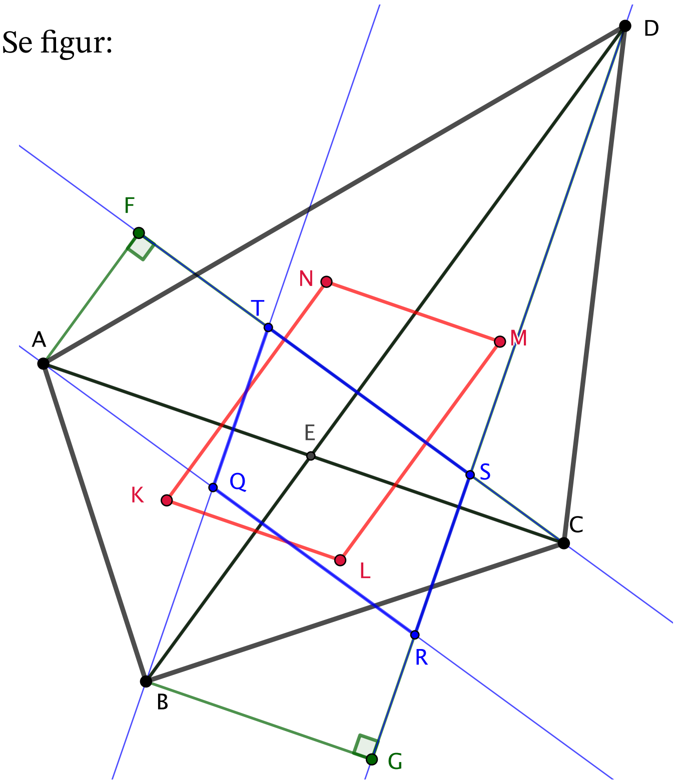
a. Om radiene i de tre sirklene er a, b og c, så er omkretsen av trekanten med hjørner i sirkelsentrene lik $2a + 2b + 2c$, så $a + b + c = \frac{1}{2}$, mens summen av arealene er $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. Vi vet at

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} \qquad \text{(AM–QM)}$$

med likhet hvis og bare hvis $a = b = c$ (i så fall lik $\frac{1}{6}$). Det gir $\pi(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{\pi}{3}(a + b + c)^2 = \frac{\pi}{12}$, med likhet når alle tre sirkler har samme radius.

b. Ved å sette inn $x = 1$ og $y = 2019$ ser vi at $f(1) = 1$. Deretter setter vi inn $y = 1$, og får at $f(2019/x) = f(x)$. Nå ser vi at den opprinnelige funksjonalligningen gir $f(x)f(y) = f(xy)$. Spesielt er $f(x)^2 = f(x^2)$, så $f(x^2) > 0$, altså $f(x) > 0$ for $x > 0$. Videre blir nå $f(x)^2 = f(x)f(2019/x) = f(x(2019/x)) = f(2019) = 1$, så $f(x) = \pm 1$. Dermed er $f(x) = 1$ for alle $x > 0$. Dersom $x < 0$ og $y > 0$, er $f(x) = f(x)f(y) = f(xy)$. Det gir at $f(x)$ har samme verdi for alle $x < 0$. Vi har to muligheter: $f(x) = 1$ for alle $x \neq 0$, eller $f(x) = 1$ for $x > 0$ og $f(x) = -1$ for $x < 0$. Begge disse fyller kravene i oppgaven.

Oppgave 4. Se figur:



Vi starter med firkanten $LMNK$ (rød i figuren): Det er kjent at høyden fra en grunnlinje til tyngdepunktet i en trekant er en tredjedel av høyden til toppunktet. Det følger at $MN \parallel AC \parallel KL$ og $LM \parallel BD \parallel KN$, så $LMNK$ er et parallellogram, og $KN = \frac{1}{3}BD$ mens $KL = \frac{1}{3}AC$. Spesielt er $KN : KL = BD : AC$.

Ortosentrene Q, R, S og T (hjørnene i den blå firkanten) er der normalene fra A, B, C og D på diagonalene AC og BD møtes, og sidekantene i firkanten er segmenter av disse normalene. Spesielt er $RS \perp AC$ og $QT \perp AC$, slik at $RS \parallel QT$. Likeledes er $QR \perp BD$ og $ST \perp BD$, slik at $QR \parallel ST$. Altså er også $QRST$ et parallellogram.

Fordi sidekantene i $LMNK$ står ortogonalt på sidekantene i $QRST$, er $\angle QRS = \angle NKL$ og $\angle TQR = \angle MKL$.

Forholdet mellom *sidene* i et parallellogram er lik forholdet mellom *høydene* i samme parallellogram, som man ser ved å trekke de to høydene fra ett hjørne og bite merke i to likeformede trekanter som oppstår.

Vi kan finne forholdet mellom høydene i $QRST$ ved å trekke en normal AF fra A på (forlengelsen av) sidekanten ST og en normal BG fra B på (forlengelsen av) sidekanten RS. Trekantene AFC og BGD er likeformede, fordi $FC \perp BD$ og $AC \perp GD$. Dermed er $BG : AF = BD : AC$.

Vi har nå vist at $QRST$ og $LMNK$ er parallellogrammer med samme vinkler og samme sideforhold, så de er likeformede.