

Niels Henrik Abels
matematikkonkurranse: Finale 2018–2019

5. mars 2019 (bokmål)



Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (fem punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

Du har et rutenett med $n \times n$ tomme ruter. Du setter et kryss i alle rutene, en rute om gangen. Når du setter kryss i en tom rute, får du $i + j$ poeng dersom det fra før er i kryss i samme rad og j kryss i samme kolonne. Hvilke poengsummer er det mulig å oppnå?

Oppgave 2

Finn alle par (m, n) av naturlige tall slik at $mn - 1 \mid n^3 - 1$.

Oppgave 3

- Tre sirkler tangerer hverandre parvis utvendig. Sentrene i sirklene er hjørnene i en trekant med omkrets lik 1. Hva er den minste mulige verdien for summen av arealene av sirklene?
- Finn alle reelle funksjoner f definert på alle reelle tall forskjellig fra null, slik at $f(2019) = 1$ og

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{2019}{x}\right)f\left(\frac{2019}{y}\right) = 2f(xy)$$

for alle $x, y \neq 0$.

Oppgave 4

Diagonalene i en konveks firkant $ABCD$ skjærer hverandre i E . Trekantene ABE , BCE , CDE og DAE har tyngdepunkt K , L , M og N , og ortosentre Q , R , S og T . Vis at firkantene $QRST$ og $LMNK$ er likeformede.