Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Finale 2017–2018 – *Løsninger*

6. mars 2018

Oppgave 1. Det kinesiske restleddteoremet tillater oss å telle opp antall par (x, y) der x er restklassen til $n!!$ modulo 125 og y er restklassen modulo 8.

Oddetallsfølgen 1, 3, 5, 7, 9, ... er kongruent med 1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, ... modulo 8, med en periode på 4. Vi multipliserer suksessivt, og ser at 1!!, 3!!, 5!!, ... blir kongruent med 1, 3, 7, 1, 1, 3, 7, 1, ..., også med periode 4.

Dernest regner vi modulo 125: For $n \geq 5$ har $n!!$ formen $5x$, der vi kan redusere x modulo 25. For $n \geq 15$ har $n!!$ formen $25x$, der vi kan redusere x modulo 5. Og for $n \geq 25$ er $n!! \equiv 0 \pmod{125}$.

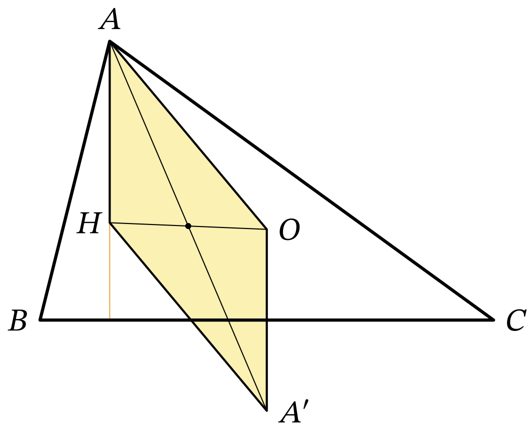
Nå kan vi sette opp en tabell:

	$n!!$ mod ...		
n	(125)	(8)	(1000)
1	1	1	1
3	3	3	3
5	$5 \cdot 3$	7	15
7	$5 \cdot 21$	1	105
9	$5 \cdot 14$	1	945
11	$5 \cdot 4$	3	395
13	$5 \cdot 2$	7	135
15	$25 \cdot 1$	1	25
17	$25 \cdot 2$	1	425
19	$25 \cdot 3$	3	75
21	$25 \cdot 3$	7	575
23	$25 \cdot 4$	1	225
25	0	1	625
27	0	3	875
29	0	7	375
31	0	1	625

og etter dette gjentar verdiene seg med periode 4. Alle verdiene til og med $n = 29$ er forskjellige, så vi ender med i alt 15 forskjellige verdier modulo 1000.

(Den siste kolonnen i tabellen er ikke nødvendig for opptellingen, men vi tar den med likevel, siden det på en måte er den det ble spurt om.)

Oppgave 2. Hvis H er det felles skjæringspunktet for de tre høydene og M_A er midtpunktet på siden BC, så er det kjent at $AH \parallel OM_A$, og AH er dobbelt så lang som OM_A. Dermed er AH like lang som OA', så $AHA'O$ er et parallellogram. Diagonalene i et parallellogram har felles midtpunkt, så AA' går gjennom midtpunktet på OH. Av samme grunn går også BB' og CC' gjennom dette punktet.



Oppgave 3.

a. Skriv $Q(x) = P(x+1) - P(x)$, $R(x) = Q(x+1) - Q(x)$ og $S(x) = R(x+1) - R(x)$. Vi setter inn, og får $R(x) = P(x+2) - 2P(x+1) + P(x)$ og $S(x) = P(x+3) - 3P(x+2) + 3P(x+1) - P(x) = 0$. Det vil si $R(x+1) - R(x)$. Men så er R et polynom med $R(0) = R(1) = R(2) = \cdots$, og da må R være konstant (fordi $R(x) - R(0)$ har uendelig mange nullpunkter). La oss si $R(x) = a$, det vil si $Q(x+1) - Q(x) = a$. Men så er $Q(x+1) - a(x+1) - \big(Q(x) - ax\big) = 0$, så polynomet $Q(x) - ax$ må være konstant, ved samme argument vi anvendte på R. La oss si $Q(x) - ax = b$, eller $Q(x) = ax + b$. Dette vil altså si $P(x+1) - P(x) = ax + b$. Vi finner $P(x+1) - \frac{1}{2}a(x+1)^2 - \big(P(x) - \frac{1}{2}ax^2\big) = b - \frac{1}{2}$, så vi kan skrive $P(x) - \frac{1}{2}ax^2 = (b - \frac{1}{2})x + c$ ved samme argument som vi brukte på Q. Med andre ord må P være et andregradspolynom.

Omvendt passer alle andregradspolynomer i ligningen. (I løsningen til punkt **b** nedenfor gjør vi det generelle tilfellet, hvor spesialtilfellet $n = 3$ nettopp er det vi nettopp har vist.)

b. For enhver funksjon f av én variabel kan vi definere $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Videre definerer vi $\Delta^n f$ ved å gjenta Δ-operatoren n ganger: Altså $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$, og generelt $\Delta^{n+1} f = \Delta(\Delta^n f)$. Vi kan også skrive $\Delta = S - 1$, der S er operatoren gitt ved $Sf(x) = f(x+1)$ og så kan vi uttrykket potensen Δ^n som $(S-1)^n$, som vi så skriver slik ved hjelp av binomialteoremet:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k).$$

Hvis du synes fremgangsmåten er tvilsom, kan du vise dette direkte ved induksjon i stedet. Den gitte ligningen kan altså skrives

$$\Delta^{2018} P(x) = 0.$$

Nå finner vi $\Delta(x^k) = (x+1)^k - x^k = kx^{k-1} + \cdots$, der $\cdots$ står for et polynom av lavere grad enn det første leddet. Ved induksjon blir

$$\Delta^j x^k = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-j+1)x^{k-j} + \cdots & \text{for } 0 \le j \le k, \\ 0 & \text{for } j > k. \end{cases}$$

Av dette følger at dersom P er et polynom, så er $\Delta^n P(x) = 0$ for alle x hvis og bare hvis P har grad mindre enn n, og svaret er derfor at P må være et polynom av grad 2017 eller mindre.

Oppgave 4.

a. Det kan være lurt å skrive tall i totallsystemet for denne oppgaven. Siden $2^{11} = 2048$, kan vi skrive 2018 i totallsystemet som $1000\,0000\,0000 - 1\,1110 = 111\,1110\,0010$. Den *binære lengden* $\beta(n)$ til et tall n er antall sifre i tallet når det skrives binært. Det er klart at $\beta(a_{i+1}) \ge \beta(a_i) - 1$ i en gyldig følge, og siden $\beta(2018) = 11$, er i hvert fall $k \ge 11$. Vi kan lage en gyldig følge slik:

k	binært	desimalt
1	111 1110 0010	2018
2	11 1111 0001	1009
3	11 1111 0000	1008
4	1 1111 1000	504
5	1111 1100	252
6	111 1110	126
7	11 1111	63
8	100 0000	64
9	10 0000	32
10	1 0000	16
11	1000	8
12	100	4
13	10	2
14	1	1

Det er i det minste *plausibelt* at dette er det beste vi kan få til: Det koster å bli kvitt enerne. Første valgmulighet er når vi skal videre fra a_2 til a_3. Ved å trekke fra 1, får vi en serie nuller for de neste stegene, men hvis vi legger til 1 i stedet, har den problematiske eneren bare flyttet seg en plass mot venstre. Neste valgmulighet er når vi skal videre fra a_7. Valget her er åpenbart: Selv om binærlengden her øker med 1, får vi nå en lang serie med nuller som raskt tar oss til målet 1.

Vi kan se hva som skjer om vi hadde valgt annerledes fra $k = 2$: Vi legger til 1 og deler på 2, med resultat

k	binært	desimalt
1	111 1110 0010	2018
2	11 1111 0001	1009
3	11 1111 0010	1010
4	1 1111 1001	505

Hvis vi nå trekker fra 1, kommer vi til $k = 4$ i den første følgen, så dette gir en lengre følge. Legger vi til 1 igjen, er vi i en tilsvarende situasjon på ny, og gjør vi det igjen og igjen, får vi dette:

k	binært	desimalt
1	111 1110 0010	2018
2	11 1111 0001	1009
3	11 1111 0010	1010
4	1 1111 1001	505
5	1 1111 1010	506
6	1111 1101	203
7	1111 1110	204
8	111 1111	102

Dette tilsvarer $k = 7$ i den første følgen, men med et ekstra enerbit, så det resulterer i en enda lengre følge.

Vi hadde også et valg etter $k = 7$ i den opprinnelige tabellen. Vi kan godt ta alle tall på denne formen i samme slengen: Tall med i enerbit er $2^i - 1$. Vi skriver $\varkappa(n)$ for lengden av den korteste gyldige følgen med $a_1 = n$ og $a_k = 1$. Én gyldig følge er alltid $2^i - 1$, 2^i, 2^{i-1}, ..., $2^0 = 1$, med lengde $i + 2$. Så $\varkappa(2^i - 1) \le i + 2$ for alle $i \ge 2$. Den andre muligheten med samme utgangspunkt starter $2^i - 1$, $2^i - 2$, $2^{i-1} - 1$, så vi vet at $\varkappa(2^i - 1) = \min(i + 2, \varkappa(2^{i-1} - 1) + 2)$. Det er klart at $\varkappa(1) = 1$, og vi finner videre $\varkappa(2^2 - 1) = \varkappa(3) = \min(2 + 2, 1 + 2) = 3$, $\varkappa(2^3 - 1) = \varkappa(7) = \min(3 + 2, 3 + 2) = 5$. Et enkelt induksjonsbevis gir nå $\varkappa(2^i - 1) = i + 2$ for $i \ge 3$. Beviset forteller også at man alltid får den korteste følgen ved å legge til 1 når utgangspunktet er på formen $2^i - 1$ med $i \ge 3$, og dermed er også beviset for punkt **a** komplett. (Og vi har fått med oss litt ekstra informasjon som vi kan bruke i punkt **b**.)

b. Vi må gå mer systematisk til verks. Da er det kanskje greit å gi en annerledes definisjon av $\varkappa(n)$, så vi slipper å snakke så mye om følger hit og dit:

$$\varkappa(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 1 \\ 1 + \varkappa(n/2) & \text{for partall } n \\ 1 + \min\{\varkappa(n+1), \varkappa(n-1)\} & \text{for oddetall } n \ge 3. \end{cases} \qquad (\nabla)$$

Det gir raskt $\varkappa(2) = 2$, $\varkappa(4) = 3$, $\varkappa(8) = 4$, og generelt $\varkappa(2^i) = i + 1$. Videre er $\varkappa(3) = 1 + \min\{3, 2\} = 3$, $\varkappa(6) = 1 + \varkappa(3) = 4$, $\varkappa(5) = 1 + \min\{4, 3\} = 4$, og $\varkappa(7) = 1 + \min\{4, 4\} = 5$.

Skriv $\lambda(m)$ for største verdi av $\varkappa(n)$ der n er et tall med bitlengde mindre enn eller lik m. Utregningene ovenfor gir $\lambda(1) = 1$, $\lambda(2) = 3$ og $\lambda(3) = 5$.

Nå vil vi først vise:

$$\lambda(m) \leq \begin{cases} 1 & \text{for } m = 1 \\ 3j + 3 & \text{for } m = 2j + 2 \text{ der } j = 0, 1, \ldots \\ 3j + 5 & \text{for } m = 2j + 3 \text{ der } j = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{$*$}$$

Dette viser vi ved induksjon på j, der vi tar oddetallstilfellet ($m = 2j + 3$) og partallstilfellet ($m = 2j + 2$) hver for seg. Vi har allerede vist ($*$), med likhet, for $m = 1$, $m = 2$ og $m = 3$.

Vi viser først ($*$) for $m = 2j + 2$. Vi antar det er riktig for en gitt $j \geq 0$, og skriver et vilkårlig tall med bitlengde $m + 2$ på formen $x00_2$, $x01_2$, $x10_2$ aller $x11_2$ der x representerer de første m bitene. Regneregelen ovenfor gir raskt $\varkappa(x00_2) = 2 + \varkappa(x_2)$, $\varkappa(x01_2) \leq 1 + \varkappa(x00_2) = 3 + \varkappa(x_2)$ og $\varkappa(x0_21) = 1 + \varkappa(x1_2) \leq 2 + \varkappa(x0_2) = 3 + \varkappa(x_2)$. Det siste tilfellet deler seg i to. Dersom x_2 inneholder bare enerbit, gjelder jo det samme for $x11_2$, men så er $\varkappa(x11_2) = m + 4 = 2j + 7 < 3(j + 1) + 4$. Ellers legger vi til 1 med resultat på formen $x_2'00$, som så reduseres til x_2' i to steg. Siden x_2' har samme bitlengde som x_2 i dette tilfellet, er vi ferdig.

Ulikheten ($*$) for $m = 2j + 3$ vises tilsvarende.

Neste trinn er å vise at ulikheten ($*$) faktisk er en *likhet*. Mer presist viser vi at tall n på formen $11\overline{01}_2$ eller $111\overline{01}_2$, der $\overline{01}$ står for $01, 0101, 010101, \ldots$, har $\varkappa(n)$ gitt ved høyresiden av ($*$), der m er bitlengden til n. For et slikt tall på formen $x01_2$ finner vi

$$\varkappa(x01_2) = 1 + \min\bigl(\varkappa(x00_2), \varkappa(x10_2)\bigr) = 1 + \min\bigl(2 + \varkappa(x_2), 1 + \varkappa(x1_2)\bigr).$$

For å vise at $\varkappa(x01_2) \geq 3 + \varkappa(x_2)$, må vi derfor vise at $\varkappa(x1_2) \geq 1 + \varkappa(x_2)$. Men

$$\varkappa(x1_2) = 1 + \min\bigl(\varkappa(x0_2), \varkappa(x'0_2)\bigr) = 2 + \min\bigl(\varkappa(x_2), \varkappa(x_2')\bigr)$$

der $x_2' = x_2 + 1$, så nå trenger vi bare vise at $\varkappa(x_2') \geq \varkappa(x_2) - 1$. Men det er opplagt fra (∇).

Dermed har vi vist ($*$). Tallet 2018 har bitlengde 11 (for $2048 = 2^{11}$). Vi har sett at $\lambda(11) = \lambda(2\cdot4+3) = 3\cdot4+5 = 17$, og maksimum oppnås for $11101010101_2 = 1 + 4 + 16 + 64 + 7 \cdot 256 = 1877$. Siden $1877 \leq 2018$, er $K = 17$.