# Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2017–2018

6. mars 2018 (bokmål)

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (seks punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

### Oppgave 1

Når $n$ er et oddetall, skriver vi $n!! = n \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 1$. Hvor mange forskjellige restklasser modulo 1000 får man fra $n!!$ for $n = 1, 3, 5, \ldots$?

### Oppgave 2

Omsenteret i en trekant $ABC$ kalles $O$. Punktene $A'$, $B'$ og $C'$ er speilbildene av $O$ i henholdsvis $BC$, $CA$ og $AB$. Vis at de tre linjene $AA'$, $BB'$ og $CC'$ møtes i et felles punkt.

### Oppgave 3

**a.** Finn alle polynomer $P$ som er slik at $P(x)+3P(x+2) = 3P(x+1)+P(x+3)$ for alle reelle tall $x$.

**b.** Finn alle polynomer $P$ som er slik at

$$P(x) + \binom{2018}{2}P(x+2) + \cdots + \binom{2018}{2016}P(x+2016) + P(x+2018)$$
$$= \binom{2018}{1}P(x+1)+\binom{2018}{3}P(x+3)+\cdots+\binom{2018}{2015}P(x+2015)+\binom{2018}{2017}P(x+2017)$$

for alle reelle tall $x$.

Binomialkoeffisientene er gitt ved $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

**Oppgave 4**

**a.** En følge $a_1, a_2, \ldots, a_k$ av heltall kalles *gyldig* dersom det for $j = 1, 2, \ldots, k-1$ gjelder at

- dersom $a_j$ er et *partall*, er $a_{j+1} = a_j/2$, men
- dersom $a_j$ er et *oddetall*, er $|a_{j+1} - a_j| = 1$.

Finn minste $k$ slik at det finnes en gyldig følge med $a_1 = 2018$ og $a_k = 1$.

**b.** Finn minste $K$ slik at det for hver $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$ finnes en gyldig følge med $a_1 = n$, $a_k = 1$ og $k \leq K$.