Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2016–2017

Finale 7. mars 2017

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (seks punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

a. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er slik at

$$f(x)f(y) = f(xy) + xy$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

b. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er slik at

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

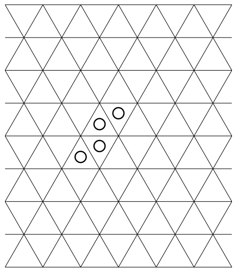
Oppgave 2

La følgen a_n være definert ved $a_0 = 2$, $a_1 = 15$ og $a_{n+2} = 15a_{n+1} + 16a_n$ for $n \geq 0$. Vis at det finnes uendelig mange heltall k slik at $269 \mid a_k$.

Oppgave 3

a. Nils har et telefonnummer med åtte ulike siffer. Han har laget 28 kort med utsagn av typen «Sifferet a kommer før sifferet b i telefonnummeret mitt» – ett for hvert par av siffer som forekommer i nummeret hans.

Hvor mange kort kan Nils vise deg uten å avsløre hva nummeret hans er?



b. I et uendelig nett av regulære trekanter spiller Niels og Henrik et spill de har laget. Annen hver gang velger Niels en rute og skriver $\times$ i denne, og annen hver gang velger Henrik en rute der han skrever en $\circ$. Hvis en av spillere får fire på rad i en retning (se figur), vinner han spillet.

Avgjør om en av spillerne kan tvinge en seier, eller om begge spillerne kan hindre den andre i å vinne.

Oppgave 4

La $a > 0$ og $0 < \alpha < \pi$ være gitt. La ABC være en trekant med $BC = a$ og $\angle BAC = \alpha$, og kall omsenteret for O, og ortosenteret for H. Punktet P ligger på strålen fra A gjennom O. La S være speilbildet til P om AC, og T speilbildet til P om AB. Anta at $SATH$ er syklisk. Vis at lengden AP kun er avhengig av a og α.