ABEL KONKURRANSEN

Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2015–2016

Finale 1. mars 2016

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (seks punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

En *vandrende følge* er en følge av heltall a_i med $a_{i+1} = a_i \pm 1$ for hver i. Vis at det finnes en følge $b_1, b_2, \dots, b_{2016}$ slik at alle vandrende følger $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ med $1 \le a_i \le 1010$ har $a_j = b_j$ for en eller annen j.

Oppgave 2

a. Finn alle positive heltall a, b, c, d med $a \le b$ og $c \le d$ slik at

$$\begin{aligned} a+b &= cd, \\ c+d &= ab. \end{aligned}$$

b. Finn alle ikke-negative heltall x, y og z slik at

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!.$$

(Her er $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, som vanlig.)

Oppgave 3

a. Tre sirkler S_A, S_B og S_C i planet med sentrum i henholdsvis A, B og C tangerer hverandre parvis utvendig. Tangeringspunktet mellom S_A og S_B kaller vi C', det mellom S_A og S_C kaller vi B', og tangeringspunktet mellom S_B og S_C kaller vi A'. Den felles tangenten mellom S_A og S_C (som går gjennom B') kaller vi ℓ_B, og den felles tangenten mellom S_B og S_C (som går gjennom A') kaller vi ℓ_A. Skjæringspunktet mellom ℓ_A og ℓ_B kaller vi X. Punktet Y ligger slik at $\angle XBY$ og $\angle YAX$ begge er rette. Vis at punktene X, Y og C' ligger på en linje hvis og bare hvis $AC = BC$.

b. La ABC være en spissvinklet trekant med $AB < AC$. Punktene A_1 og A_2 ligger på linjen BC slik at AA_1 og AA_2 er den indre, henholdsvis ytre vinkelhalveringslinjen i A i trekanten ABC. La A_3 være speilbildet til A_2 om punktet C, og la Q være et punkt på AA_1 slik at $\angle A_1QA_3 = 90°$. Vis at $QC \parallel AB$.

Oppgave 4

Finn alle funksjoner $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at likningen

$$f(x)f(y) = |x - y| \cdot f\left(\frac{xy + 1}{x - y}\right)$$

er oppfylt for alle valg av to forskjellige reelle tall x og y.