

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2014–2015

Finale 17. mars 2015

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (sju punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på egne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ord-bøker er tillatne.

Oppgåve 1

- a. Bestem alle trippel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ som oppfyller likningane

$$x^2 + 4y^2 = 4zx,$$

$$y^2 + 4z^2 = 4xy,$$

$$z^2 + 4x^2 = 4yz.$$

- b. Bestem alle funksjonar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ slik at

$$x^2 f(yf(x)) = y^2 f(x) f(f(x))$$

for alle reelle tal x og y .

Oppgåve 2

- a. Kong Arthur skal plassere $a+b+c$ riddarar omkring eit bord. a riddarar er kledde i raudt, b riddarar er kledde i brunt, og c riddarar er kledde i oransje.

Arthur vil gjerne plassere riddarane slik at ingen av dei sit ved sida av ein riddar kleddt i samme farge som han sjølv. Vis at dette er mulig hvis, og berre hvis, det finst ein trekant med sidelengder $a + \frac{1}{2}$, $b + \frac{1}{2}$ og $c + \frac{1}{2}$.

- b. Nils spelar eit spel med ein pose som opphavleg inneheld n raude og éi svart kule. Han startar med ein formue lik 1.

I kvart trekk vel han eit reelt tal x med $0 \leq x \leq y$, der hans noverande formue er lik y . Så trekkjer han ei kule frå posen. Hvis kula er raud, aukar formuen med x , men hvis ho er svart, minkar han med x . Spelet er slutt etter n trekk, når det er berre ei kule att.

I kvart trekk vel Nils x slik at han sikrar seg ein sluttformue større eller lik Y . Kva er største mulige verdi for Y ?

Oppgåve 3

Dei fem sidekantane i ein regulær femkant vert forlengta til linjer $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ og ℓ_5 . Skriv d_i for avstanden frå eit punkt P til ℓ_i . For kva punkt i det indre av femkanten er produktet $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$ maksimalt?

Oppgåve 4

- Bestem alle ikkje-negative heiltal x og y slik at $3^x + 7^y$ er eit kvadrattal og y er eit partal.
- Bestem alle ikkje-negative heiltal x og y slik at $3^x + 7^y$ er eit kvadrattal og y er eit oddetal.