Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2012–2013. *Løsninger*

Finale 7. mars 2013

Oppgave 1.

a. Ulikheten kan skrives om til

$$(3 + a - \tfrac{1}{4}a^2)x^2 + (\tfrac{1}{2}ax + y)^2 \geq 0,$$

som holder for alle x og y dersom $3 + a - \frac{1}{4}a^2 \geq 0$. Valget $x = 1$ og $y = -\frac{1}{2}a$ viser at denne betingelsen også er nødvendig. Men $3+a-\frac{1}{4}a^2 = (\frac{1}{2}a-1)^2-4$, så betingelsen holder presis når $-2 \leq a \leq 6$.

b. For $n \geq 2$ gjelder

$$\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_n &= na_{n+1} - n, \\ a_1 + \cdots + a_{n-1} &= (n-1)a_n - n + 1. \end{aligned}$$

Differensen mellom de to ligningene kan forenkles til

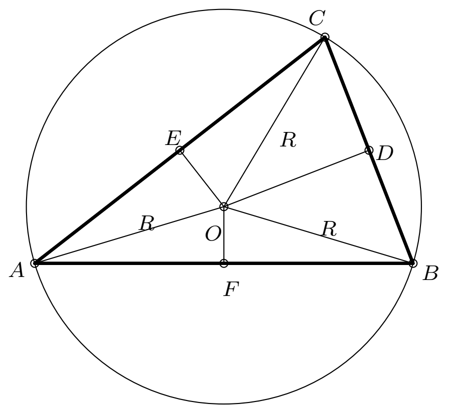
$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}.$$

Dermed er a_n gitt ved summen av en harmonisk rekke. Denne kan estimeres ved hjelp av Cauchy–Schwarz-ulikheten og en teleskopsum:

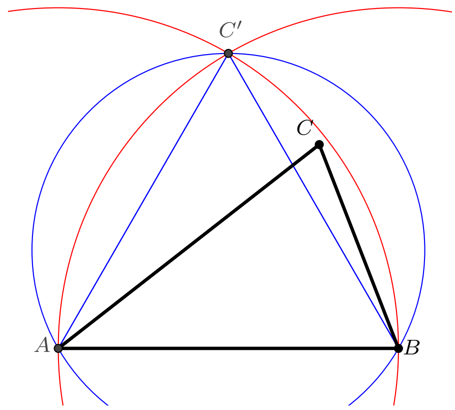
$$\begin{aligned} a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} &\leq \sqrt{n}\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}} < \sqrt{n}\sqrt{2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)}} \\ &= \sqrt{n}\sqrt{2 + \sum_{k=2}^{n-1}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big)} = \sqrt{n}\sqrt{3 - \frac{1}{n-1}} < \sqrt{3n}, \end{aligned}$$

slik at $a_n/n < \sqrt{3/n}$, som gir $a_n < \beta n$ dersom $n \geq 3\beta^2$.

Ulikheten $a_n < \sqrt{3n}$ kan også vises ved induksjon.



Oppgave 2. Omsenteret O er det felles skjæringspunktet mellom midtnormalene til sidekantene (se figur, der D, E og F er midpunkter på sidene). Fordi $\triangle ABC$ er spissvinklet, ligger O i det indre av trekanten, og ethvert punkt i trekanten ligger i en av seks rettvinklede trekanter $\triangle AEO$, $\triangle CEO$, og så videre. Alle disse rettvinklede trekantene har hypotenus av lengde R, radien til den omskrevne sirkelen. Ethvert punkt i $\triangle AEO$ har avstand til A mindre enn eller lik hypotenusen R. Tilsvarende gjelder for de fem andre småtrekantene. Dermed gjenstår det nå bare å vise at $R \le s/\sqrt{3}$.



Anta for enkelhets skyld at AB er den lengste siden, altså $AB = s$. Velg et punkt C', på samme side av AB som C, slik at $\triangle ABC'$ er likesidet. En enkel utregning viser at den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC'$ har radius $s/\sqrt{3}$. Punktet C må ligge innenfor de to røde sirklene i figuren, med sentrum i A og B og med radius s. Og som vi ser av figuren, må da C ligge innenfor den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC'$, som altså har radius $s/\sqrt{3}$. Det impliserer at den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$ har radius $R \le s/\sqrt{3}$.

Oppgave 3. Summen på venstresiden kan skrives om til

$$\sum_{k=2}^{p-1} \frac{k-2}{k} = p - 2\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} = p - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p-k}$$

$$= p - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{k(p-k)} = \frac{p! - \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k(p-k)}}{(p-1)!},$$

der telleren er et heltall delelig med p, mens nevneren er et heltall som ikke er delelig med p (fordi p er et primtall). Dermed går p opp i telleren i den maksimalt forkortede brøken (igjen fordi p er primtall), og da går p også opp i telleren i enhver heltallsbrøk med samme verdi.

Oppgave 4.

a. Hvis vi ser bort fra ordningen, finnes det $\binom{2013}{4}$ måter å velge de fire hjørnene på. For hver av disse kan vi velge P_1 på fire måter. Da må P_2 være motstående hjørne i firkanten utspent av de fire hjørnene, og det er to mulige permutasjoner av de siste to hjørnene. I alt gir det

$$\binom{2013}{4} \cdot 8$$

kryssende firetupler.

b. Vi kan fargelegge småeskene slik at alle naboene til en svart eske er hvit, og omvendt. Når bien kommer tilbake til samme eske den startet i, må den ha vært innom like mange svarte som hvite esker, startesken medregnet. Så det totale antall esker må være et partall, og derfor må minst ett av tallene a, b eller c være et partall.

For å se at bien kan fly en slik rute når det er tilfelle, kan vi skjære opp stabelen i c skiver, hver av størrelse $a \times b$. Så legger vi skivene flatt etter hverandre annenhver vei, slik at de a eskene som var nederst i første skive havner ved siden av de nederste a eskene i andre skive, mens de øverste a eskene i andre skive havner ved siden av de som var øverst i tredje skive, og så videre.

Dermed har vi gjort om problemet til en stabel med størrelse $a \times bc$. Det er lett å se at dette er løsbart, så lenge minst en av sidelengdene er et partall.