Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2012–2013

Finale 7. mars 2013

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (seks punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

a. Finn alle reelle tal a som er slik at ulikheita

$$3x^2 + y^2 \geq -ax(x + y)$$

held for alle reelle tal x og y.

b. Følgja a_1, a_2, a_3, $\ldots$ er definert slik at $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} + 1 \qquad \text{for } n \geq 1.$$

Vis at for kvart reelt positivt tal β kan vi finne ein k slik at $a_k < \beta k$.

Oppgåve 2

I ein trekant T er alle vinklane mindre enn 90°, og den lengste sida har lengd s. Vis at for kvart punkt p i T kan vi velje eit hjørne h i T slik at avstanden frå p til h er mindre enn eller lik $s/\sqrt{3}$.

Oppgåve 3

Eit primtal $p \geq 5$ er gitt. Skriv

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{p-3}{p-1} = \frac{a}{b}$$

for naturlege tal a og b. Vis at p går opp i a.

Oppgåve 4

a. Eit ordna firetuppel (P_1, P_2, P_3, P_4) av hjørne i ein regulær 2013-kant vert kalla *kryssande* dersom dei fire hjørna alle er forskjellige og linjestykket frå P_1 til P_2 skjer linjestykket frå P_3 til P_4. Kor mange kryssande firetuppel finst i 2013-kanten?

b. I alt $a \cdot b \cdot c$ terningforma småesker er sett saman til ein $a \times b \times c$ rektangulær stabel, der $a, b, c \geq 2$. Det er ei bie inne i ei av småeskene. Ho kan flyge frå ei småeske til ei anna gjennom eit hol i veggen, men ikkje gjennom kantar eller hjørne. Ho kan heller ikkje flyge utanfor stabelen. For kva tripler (a, b, c) er det mulig for bia å flyge innom alle småeskene nøyaktig éin gong, og ende opp i småeska der ho starta?