Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2011–2012. *Løsninger*

Andre runde 19. januar 2012

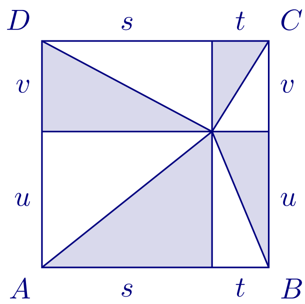
Oppgave 1. Kari kan velge en delmengde av alle bamsene på $2^{10} = 1024$ forskjellige måter. Hun har valgt bort muligheten å ta med ingen bamser (1 måte), én bamse (10 måter) eller nøyaktig to bamser ($\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 = 45$ måter). Da gjenstår $1024 - 1 - 10 - 45$ muligheter. **968**

Oppgave 2. Tallet $a_1 = 2012$ kan også skrives $2048 - 32 - 4$, som blir 11111011100 i totallsystemet. Det tar ett trinn å bli kvitt hver av tre nuller og to trinn å bli kvitt hver av sju enere, det vil si i alt $3 + 2 \cdot 7 = 17$ trinn å bli kvitt alle de binære sifrene utenom den første eneren.

Alternativt kan vi skrive opp tallfølgen direkte: 2012, 1006, 503, 502, 251, 250, 125, 124, 62, 31, 30, 15, 14, 7, 6, 3, 2, 1, 0, 0,. . . , og så trenger vi bare telle oss frem til svaret. **18**

Oppgave 3. La x betegnet tallet. Den andre opplysningen gir $x = 2012n+100$ for et heltall n, så x er delelig med 4. Den første opplysningen gir $x = 2010m + 1000$ for et heltall m. Siden både x og 1000 er delelege med 4, mens 2010 ikke er det, må m være et partall. Men da er $2010m$ delelig med 12, så svaret blir det samme som resten når 1000 deles med 12. Vi har $1000 = 12 \cdot 83 + 4$. **4**

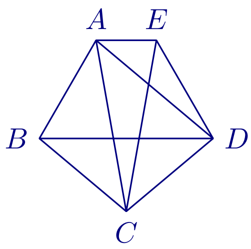
Oppgave 4. For et generelt indre punkt Q i et kvadrat $ABCD$ gjelder $AQ^2 + CQ^2 = BQ^2 + DQ^2$. Man kan se dette ved å anvende Pythagoras på hver av de fire skyggelagte trekantene i figuren og legge sammen:



$$AQ^2 = s^2 + u^2 \qquad BQ^2 = t^2 + u^2$$
$$CQ^2 = t^2 + v^2 \qquad DQ^2 = s^2 + v^2$$

Med $Q = P$ får vi $CP^2 = BP^2 + DP^2 - AP^2 = 2 \cdot (10\sqrt{5})^2 - 39 = 961 = 31^2$. **31**

Oppgave 5. $m^3 + m^2 - m - 1 = m^2(m+1) - (m+1) = (m^2-1)(m+1) = (m-1)(m+1)^2$ er et kvadrattall nøyaktig når $m-1$ er det, altså $m = 1+k^2$. Her kan k ta alle verdier fra og med $k = 1$ til og med $k = 99$. **99**

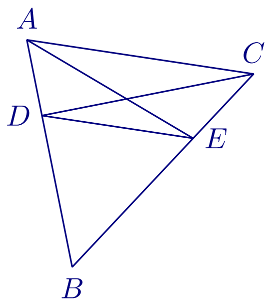


Hver vinkel i figuren er et heltallig multippel av 20°.

Oppgave 6. Trekantene EDC og ABC har en lik vinkel og to like sider, så de er kongruente. Spesielt er trekanten ACE likebent, slik at $\angle EAC = \angle AEC = 80°$, og $\angle ACE = 180° - 2 \cdot 80° = 20°$. Trekantene EDC og ABC er også likebente, så $\angle BAC = \angle BCA = \angle DEC = \angle DCE = 40°$. Det gir $\angle ABC = \angle CDE = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$. Men vi har også $\angle BCD = 40° + 20° + 40° = 100°$. Dermed er trekantene ABC og BCD kongruente (to like sider og en lik vinkel), så $AC = BD$. Dette betyr i sin tur at trekantene ACD og DBA er kongruente, siden de har tre like sider. Dermed er $\angle ADC = \angle DAB$. Vinkelsummen i firkanten $ABCD$ er 360°, det vil si $2 \cdot \angle DAB + 2 \cdot 100° = 360°$, altså $\angle DAB = 80°$. Til sist er da $\angle CAD = \angle DAB - \angle BAC = 80° - 40° = 40°$.
. . . . **40**

Oppgave 7. La hver av vennene holde gaven de gir bort i høyre hånd, og ta tak i gaven de mottar i venstre hånd, mens ingen slipper taket. Da blir enten alle fem stående i en sirkel, eller de blir stående i to sirkler, med tre venner i den ene sirkelen og to i den andre. Alle fem i en sirkel kan forekomme på $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måter. Den andre muligheten kan telles slik: Det er $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ måter å velge ut de to som danner en sirkel alene. For hver av disse finnes det to måter å ordne de andre tre i en sirkel, tilsammen $10 \cdot 2 = 20$ muligheter. **44**

Oppgave 8. Bruk $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ der a og b er de to parentesene i telleren. Da blir $a + b$ lik parentesen i nevneren, og forkortes mot denne. Vi står igjen med $\frac{1}{3018}(a-b) = 2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + \cdots + 2012^2 - 2011^2$, som er en sum av ledd på formen $(2n)^2 - (2n-1)^2 = (2n-1) + 2n$, for $n = 1, 2, \ldots, 1006$, altså lik $1 + 2 + 3 + \cdots + 2012 = \frac{1}{2} \cdot 2012 \cdot 2013$. Svaret blir $\frac{1006 \cdot 2013}{3018} = \frac{2013}{3}$. **671**



Oppgave 9. For enkelhets skyld skriver vi $|XYZ|$ for arealet av trekanten XYZ. Trekantene ABC og DBE er likeformede, og den sistnevnte er $\frac{2}{3}$ så stor i hver retning. Dermed blir $|DBE| = \frac{4}{9}|ABC| = 200$, så firkanten $ADEC$ har areal $450 - 200 = 250$. Linjestykkene AC og DE er parallelle, så høyden fra AC til E er lik høyden fra DE til C. Dermed er $|DEC| = \frac{2}{3}|ACE|$ siden forholdet mellom grunnlinjene DE og AC er $\frac{2}{3}$. Arealet av firkanten $ADEC$ kan nå skrives $250 = |ACD| + |DEC| = \frac{5}{3}|ACD|$, så $|ACD| = 150$. Til sist ser vi at trekantene AFC og EDC er likeformede (tre like vinkler), med EDC $\frac{2}{3}$ så stor som AFC. Spesielt er $DF = \frac{2}{3}FC$, så $DF = \frac{2}{5}DC$. Trekantene AFD og ACD har samme høyde fra A, mens forholdet mellom grunnlinjene er $FD/CD = \frac{2}{5}$, så $|AFD| = \frac{2}{5}|ACD| = 60$. **60**

Oppgave 10. På en tavle ved siden av skriver vi opp tallene $1/a$ for hvert tall a på den første tavlen. Når listen på den første tavlen starter med a og b, starter listen på den andre tavlen med $x = 1/a$ og $y = 1/b$. På den første tavlen strykes a og b, og $ab/(a+b)$ føyes til bakerst. På den andre tavlen strykes da x og y, og $(a+b)/(ab) = y+x$ føyes til bakerst. Derfor vil summen av alle tallene på den andre tavlen forbli konstant lik $1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+\cdots+9\cdot\frac{1}{9}+10\cdot\frac{1}{10} = 10$, og det er så det tallet som til sist står alene igjen. **10**

Fasit

1		**968**	6		**40**
2		**18**	7		**44**
3		**4**	8		**671**
4		**31**	9		**60**
5		**99**	10		**10**

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.