Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2011–2012. *Løsninger*

Første runde 3. november 2011

Oppgave 1. Alle heltall mindre enn 100 som er delelige på 3 er på formen $3k$ der $k = 1, 2, \ldots, 33$. Av disse tallene er de hvor k er et oddetall ikke delelige på 2. Det gir totalt 17 muligheter. .... **B**

Oppgave 2. Hver jente sitter ved siden av en annen jente, men det kan ikke sitte tre jenter på rad. Hver gutt må sitte mellom to jenter, for hvis to gutter sitter ved siden av hverandre, kan vi bare ha gutter rundt bordet. Dermed sitter barna etter mønsteret to jenter, en gutt, to jenter, en gutt og så videre, så det er dobbelt så mange jenter som gutter: ti jenter og fem gutter. .... **A**

Oppgave 3. Siden $\angle BAE = 60°$, er $\angle EAD = 30°$. Trekanten DAE er likebent, og dermed $\angle ADE = \angle DEA = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$. Dermed er $\angle EDC = 90° - \angle ADE = 15°$. .... **C**

Oppgave 4. Det er x selgere som i løpet av uka har skrevet $5x$ rapporter. På den annen side har selgerne og lederen mottatt i alt $\frac{3}{2}x + 420$ rapporter, slik at $5x = \frac{3}{2}x + 420$. Dermed er $x = 120$. .... **C**

Oppgave 5. Anta at Kari og Ida har n venner felles i klassen. Da har Kari $14 - n$ venner som ikke er venner med Ida og Ida har $13 - n$ venner som ikke er venner med Kari. Det betyr at det må være minst $n + (14 - n) + (13 - n) = 27 - n$ elever i klassen. Dette betyr at n ikke kan være mindre enn 7.

La Kari og Ida være venner og del de 18 andre elevene inn i 6 elever som bare er venn med Kari, 5 som bare er venn med Ida og 7 som er venn med begge. Da får Kari akkurat 14 venner, Ida akkurat 13 venner og de har 7 felles venner. .... **B**

Oppgave 6. Om m, n og p er tre av de utvalgte tallene, så er $m + p = 12u$ og $n + p = 12v$ der u og v er heltall. Da er $m - n = (m+p) - (n+p) = 12(u - v)$, så $m = n + 12(u - v)$, og derfor har m og n samme rest etter divisjon med 12. Med andre ord vil alle de utvalgte tallene ha samme rest etter divisjon med 12, la oss si r. Summen av to av disse har formen $(12k + r) + (12k' + r) = 12(k + k') + 2r$, som er delelig med 12 hvis og bare hvis $r = 0$ eller $r = 6$ (siden $0 \leq r \leq 11$). Dersom Nils velger fler enn to tall kan han bare velge dem alle blant tallene $12k$ for $k = 1, \ldots, 16$, eller alle blant $12k + 6$ for $k = 0, \ldots, 16$. Det maksimale antallet blir 17. .... **B**

Oppgave 7. Om radien i den minste sirkelen er r så har den mellomstore sirkelen radius $\sqrt{2}r$. Diameteren i den største sirkelen er summen av diameterne i de to mindre, så det samme må gjelde radiene. Den største sirkelen har da radius $(1+\sqrt{2})r$, så forholdet mellom arealet av den største og den minste sirkelen er $\pi((1+\sqrt{2})r)^2/(\pi r^2) = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$. .... **E**

Oppgave 8. Vi setter opp regnestykket der x_0, x_1, x_2 og x_3 er sifrene i a:

$$\begin{array}{ccccc} & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ + & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline = & 6 & 9 & 8 & 5 \\ \hline\hline \end{array}$$

Fra siste kolonne ser vi at x_0+x_3 er 5 eller 15. Hvis summen var 15, fikk vi mer enn 10 i første kolonne, og summen ville blitt femsifret. Altså er $x_0+x_3=5$. Videre ser vi at det må være mente fra både andre og tredje kolonne, og at $x_2+x_1=18$. Altså er $x_0+x_1+x_2+x_3=18+5=23$. .... **D**

Oppgave 9. La Anne, Berit og Cecilie få henholdsvis A, B og C klinkekuler. Da må $C=2A$, $A<B<C$ og $A+B+C=2011$. Det gir $B=2011-C-A=2011-3A$. Ulikhetene kan dermed skrives som $A<2011-3A<2A$. Den første ulikheten gir $4A<2011$, eller $A<502\frac{3}{4}$. Den andre gir $2011<5A$ eller $402\frac{1}{5}<A$. Siden A må være et heltall kan vi skrive $403 \le A \le 502$. Det er dermed $502-403+1=100$ måter å gjøre det på. .... **E**

Oppgave 10. Om vi skriver $2011^{2012}=(2010+1)^{2012}$ og ganger ut så vil alle leddene som inneholder 2010 i en potens 2 eller høyere ende på to nuller, og dermed ikke bidra til de to siste sifrene i svaret. Kaster vi bort disse leddene står vi igjen med $2012\cdot 2010^1\cdot 1^{2011}+2010^0\cdot 1^{2012}=2012\cdot 2010+1$, som ender med 21. .... **B**

Oppgave 11. Vi ser at $1000x-x=126$. Altså $x=\frac{126}{999}=\frac{14}{111}$. Denne brøken kan vi ikke forkorte mer, så x kan ikke skrives på formen $x=p/q$ med q mindre enn 111. .... **B**

Oppgave 12. Start midt på den øverste linjen og følg linjen mot venstre. Hver gang du kommer til en av de markerte vinklene, snur du $180^\circ - x$ mot venstre, der x er størrelsen på de markerte vinklene. Fortsett til du er tilbake ved utgangspunktet. Da har du passert sju vinkler og dreid tre hele omdreininger mot venstre: $7\cdot(180^\circ - x) = 3\cdot 360^\circ$ gir $x=180^\circ/7=25\frac{5}{7}^\circ$. **E**

Oppgave 13. Alle trekanter i figuren er rettvinklede og har hypotenus langs en av de skrå linjene. Ethvert valg av to punkter langs en av de skrå linjene gir to trekanter med de to punktene i enden av hypotenusen, én over og én under den skrå linjen. De skrå linjene har 2, 3, 4, 5, 4, 3 og 2 punkter. Man kan velge ut to av n punkter på $\frac{1}{2}n(n-1)$ måter, så antall trekanter blir $2\left(\frac{2\cdot1}{2}+\frac{3\cdot2}{2}+\frac{4\cdot3}{2}+\frac{5\cdot4}{2}+\frac{4\cdot3}{2}+\frac{3\cdot2}{2}+\frac{2\cdot1}{2}\right)=2(1+3+6+10+6+3+1)=60$. **C**

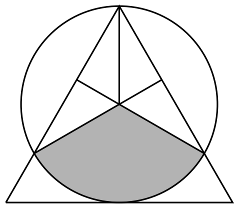
Oppgave 14. Vi finner $E^2-A^2=(\pi-3)^2/4>0$, så $E>A$ siden begge er positive. Videre er $A-B=(\pi-3)/6>0$, så $A>B$. Og så er $A^2-C^2=(\pi-3)^2/4>0$, så $A>C$. Endelig er $1/D^2-1/C^2=\frac{1}{4}(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{3})^2>0$, så $C>D$. (Ulikhetene $D<C<A<E$ er et spesialtilfelle av kjente ulikheter mellom harmonisk, geometrisk, aritmetisk og kvadratisk middelverdi – her mellom tallene π og 3.) .... **E**

Oppgave 15. Vi har $1007^4-1005^4=(1007^2-1005^2)\cdot(1007^2+1005^2)=(1007-1005)\cdot(1007+1005)\cdot((1006+1)^2+(1006-1)^2)=2\cdot2012\cdot2\cdot(1006^2+1)=2012\cdot(2012^2+4)=(2011+1)\cdot((2011+1)^2+4)$. Når vi ganger ut og kaster vekk heltallige multipler av 2011, står vi tilbake med 5. .... **B**

Oppgave 16. Vi ser at $(a/b)\cdot(b/c)\cdot(c/a)=1$, så trippelet $(a/b,b/c,c/a)$ må være ett av de fire triplene $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$. . **C**

Oppgave 17. Omkretsen av planeten blir $2\pi\cdot2/\pi\,\mathrm{km}=4\,\mathrm{km}$. For enkelhets skyld kan vi tenke oss at huset til den lille prinsen ligger ved nordpolen. Den første kilometeren tar ham til ekvator. Så følger han ekvator i tre kilometer, og går strake veien hjem, altså enda en kilometer. Totalt blir det $5\,\mathrm{km}$. . . **D**

Oppgave 18. La oss si at det finnes a_n gode ord av lengde n. Begge ord av lengde 1 er gode, så $a_1=2$. Av lengde 2 kan vi ha AA, AB eller BA, så $a_2=3$. Vi får alle gode ord av lengde $k>2$ ved å starte med A og fortsette med et godt ord av lengde $k-1$ eller starte med BA og fortsette med et godt ord av lengde $k-2$. Det vil si $a_k=a_{k-1}+a_{k-2}$. Dermed blir $a_3=a_2+a_1=5$, $a_4=a_3+a_2=8$, $a_5=a_4+_3=13$, $a_6=a_5+a_4=21$, $a_7=a_6+a_5=34$ og $a_8=a_7+a_6=55$. .... **C**



Oppgave 19. Den likesidede trekanten har høyde $\sqrt{3}$, så den får også areal lik $\sqrt{3}$. Sirkelradien blir $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Den markerte sirkelsektoren er en tredel av sirkelen, siden den tilhørende periferivinkelen er $60°$. Den har derfor areal $\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{\pi}{4}$. I figuren finnes også fire kongruente småtrekanter med vinkler $30°$, $60°$ og $90°$ og hypotenus $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. De to katetene i hver av dem får lengder $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ og $\frac{3}{4}$. Så arealene av de fire småtrekantene er tilsammen $2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$. Vi får arealet vi leter etter ved subtraksjon: $\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$. .... **A**

Oppgave 20. Faktoren 2 opptrer mer enn $2+4+6+\cdots+98 = 2450$ ganger i produktet. Faktoren 5 opptrer én gang i hvert femte tall, pluss en ekstra gang i 25, 50 og 75, så den forekommer i alt $5+10+\cdots+95+25+50+75 = 1100$ ganger i produktet. Siden det er færre femmere enn toere blant faktorene, er svaret 1100. .... **E**

Fasit

1		B	11		B
2		A	12		E
3		C	13		C
4		C	14		E
5		B	15		B
6		B	16		C
7		E	17		D
8		D	18		C
9		E	19		A
10		B	20		E

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.