Rettet 22.1.2010

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2009–2010. *Løsninger*

Andre runde 21. januar 2010

Oppgave 1. Alle interessante tall kan skrives som $200a + a = 201a$, der a er et positivt heltall. Så alle interessante tall er delelige på 201. På den andre siden er både $201 \cdot 5$ og $201 \cdot 7$ interessante, og de har største felles divisor lik 201, så det fins ikke noe større tall som alle interessante tall er delelige på. **201**

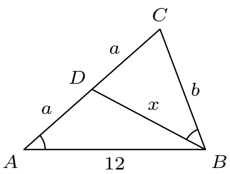
Oppgave 2. Vi får et anslag ved å starte med 201 og dividere på 2,1 tre ganger og hver gang avrunde oppover til nærmeste heltall. Det gir 22. Hvis vi utfører operasjonen tre ganger på 22, får vi faktisk 201 (mens vi får et mindre tall hvis vi starter med 21 og et større tall hvis vi starter med 23). **22**

Oppgave 3. Trekanten AEB har grunnlinje AE av lengde 8 og høyde 4 (AB og BC er like lange), og areal $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$, mens trekanten CDE har areal $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$. Trekanten BEC har dermed areal $90 - 16 - 32 = 42$. **42**

Oppgave 4. Tre tall som har sum som er delelig på 3, har enten alle samme rest når de deles på 3, eller de har rest henholdsvis 0, 1 og 2. Fra og med 1 til og med 13 er det 4 tall som har rest 0, 5 tall som har rest 1 og 4 tall som har rest 2. Det er 4 måter å velge tre tall med rest 0, 10 måter å velge tre tall med rest 1, 4 måter å velge tre tall med rest 2, og $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ måter å velge tre tall med forskjellig rest – til sammen 98 måter. **98**

Oppgave 5. Vi faktoriserer og får $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 = 485$, og 485 kan skrives som et produkt av to positive heltall bare på to måter, $1 \cdot 485$ eller $5 \cdot 97$. Faktoren $a-b$ er mindre enn a^2+ab+b^2, så $a-b=1$ eller $a-b=5$, som henholdsvis gir $(b+1)^2+(b+1)b+b^2 = 485$ eller $(b+5)^2+(b+5)b+b^2 = 97$, altså $3b^2 + 3b - 484 = 0$ eller $b^2 + 5b - 24 = 0$. Bare den siste har positiv heltallig løsning, $b = 3$, som gir $a = 8$, og $8^3 + 3^3 = 539$. **539**

Oppgave 6. Ved å multiplisere ut og ved opplysningen i oppgaven, er $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 5ab(a+b)$, slik at $(a+b)^2 = 5ab$, og $a^2 + b^2 = 3ab$ ved første kvadratsetning. Dette gir $a/b + b/a = 3$, og $a^2b^{-2} + 2 + a^{-2}b^2 = 9$ ved første kvadratsetning, slik at $a^{-2}b^2 + a^2b^{-2} = 7$. **7**



Oppgave 7. La AD, BC og BD ha lengde henholdsvis a, b og x (da har også CD lengde a). Trekantene ABC og BDC er formlike, slik at $b/a = 2a/b$ og $x/12 = a/b$. Den første likningen gir $a^2/b^2 = 1/2$, og fra den andre får vi $x^2 = 12^2 a^2/b^2 = 12^2/2 = 72$. **72**

Oppgave 8. Likningen kan skrives om til $(x+2)(y+1)(z+1) = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Det er fire muligheter for heltallige positive (x, y, z): $(1,1,4)$, $(1,4,1)$, $(3,1,2)$ eller $(3,2,1)$. I alle tilfellene er $x + y + z = 6$. **6**

Oppgave 9. Anta at det er m jenter og n gutter i klassen. Det er $m(m-1)/2$ måter å velge to jenter på (m muligheter for den ene jenta og $m-1$ for den andre, men da har vi telt hvert par to ganger), og for hver av disse måtene er det $n(n-1)/2$ måter å velge to gutter på. Så $m(m-1)n(n-1)/4 = 3630$, og $(m-1)m \cdot (n-1)n = 4 \cdot 3630 = 10 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 12$. To heltall som følger etter hverandre, kan ikke begge være delelige med 11, så både $(m-1)m$ og $(n-1)n$ er delelige med 11. Begge disse produktene må derfor være større enn eller lik $10 \cdot 11$ – men hvis et av dem er det, må det andre være mindre enn eller lik $11 \cdot 12$. Dermed er hvert produkt $10 \cdot 11$ eller $11 \cdot 12$, og den eneste muligheten for å få $4 \cdot 3630$, er at vi har ett av hvert slag. Så $m + n = 11 + 12 = 23$. **23**

Oppgave 10. Leddene i summen er av form $i!\,(i^2+i+1) = i!\,(i+1)^2 - i! \cdot i = (i+1)!\,(i+1) - i! \cdot i$. Når vi lar i gjennomløpe tallene fra 100 til 1, får vi til sammen 200 ledd, der alle, unntatt det første og det siste, kanselleres mot hverandre. Så $S = 101! \cdot 101 - 1$, og $(S+1)/101! = 101$. **101**

Fasit

1		**201**	6		**7**
2		**22**	7		**72**
3		**42**	8		**6**
4		**98**	9		**23**
5		**539**	10		**101**

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.