Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
2009–2010

Finale 11. mars 2010

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (åtte punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. Begynn på nytt ark for hver oppgave.

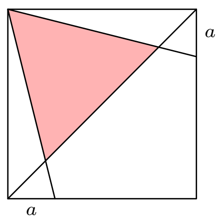
Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Det gir en poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

a. Punktet P ligger på siden AB til en firkant $ABCD$. Vinklene BAD, ABC og CPD er rette, og $AB = BC + AD$. Vis at $BC = BP$ eller $AD = BP$.

b. Sidene i kvadratet på figuren har lengde 1. Finn arealet av det merkede området uttrykt ved a, der $0 \leq a \leq 1$.



Oppgave 2

a. Vis at $\dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{(1-x)^2}{x} \geq 1$ for alle reelle tall x, der $0 < x < 1$.

b. Vis at $abc \leq (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)^2$ for alle positive reelle tall a, b og c som er slik at $a + b + c = 1$.

Oppgave 3

a. Det er 25 deltakere i en matematikkonkurranse med fire oppgaver. Hver oppgave regnes som løst eller ikke løst (det er altså ikke mulig med delvis riktige svar). Vis at det enten fins fire deltakere som har løst de samme oppgavene (eller ikke fått til noen av dem), eller to deltakere der den ene har løst nøyaktig de oppgavene som den andre ikke har løst.

b. Det er k sportsklubber for elever i en videregående skole. Skolen har 100 elever, og uansett hvilke tre av dem vi plukker ut, så fins det en klubb der minst én av dem, men ikke alle, er med. Hva er minste mulige verdi av k?

Oppgave 4

a. Finn alle positive hele tall k og l som er slik at $k^2 - l^2 = 1005$.

b. La $n > 2$ være et helt tall. Vis at det er mulig å velge n punkter i planet, som ikke alle ligger på én linje, slik at avstanden mellom alle par av punkter er heltallig (det vil si at $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ er heltallig for alle par (x_1, y_1) og (x_2, y_2) av punkter).