Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2008–2009

Finale 12. mars 2009

I finalen i Abelkonkurransen er det 4 oppgåver (8 punkt) som skal løysast på 4 timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. Begynn på nytt ark for kvar oppgåve.

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Det gir ein poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

a. Vis at det finst uendeleg mange heiltal som ikkje kan skrivast som differansen mellom to kvadrattal.

b. Vis at summen av tre kubikktal som kjem etter kvarandre, alltid kan skrivast som differansen mellom to kvadrattal.

(Eit kvadrattal er eit heilt tal opphøgd i andre potens. Eit kubikktal er eit heilt tal opphøgd i tredje potens.)

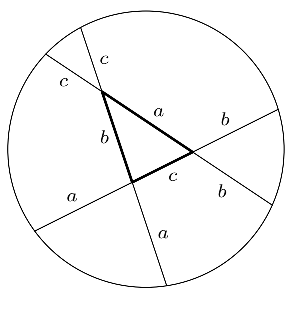
Oppgåve 2

Det er to bokstavar i eit språk. Alle ord består av sju bokstavar, og to ulike ord har alltid ulike bokstavar på minst tre plassar.

a. Vis at eit slikt språk ikkje kan ha fleire enn 16 ord.

b. Kan det vere 16 ord i språket?

Oppgåve 3



a. I trekanten ABC har sida BC lengda a, sida AC lengda b og sida AB lengda c. Forleng alle tre sidene i begge endane – med lengda a frå hjørne A, b frå B og c frå C. Vis at dei seks endepunkta til dei forlengde sidene alle ligg på ein felles sirkel.

b. Vis at det for alle positive heiltal n finst ein sirkel i planet som er slik at det nøyaktig er n gitterpunkt innafor sirkelen. (Eit gitterpunkt er eit punkt med heile tal som koordinatar.)

Oppgåve 4

a. Vis at $\left(\frac{2010}{2009}\right)^{2009} > 2$.

b. La $x = 1 - 2^{-2009}$. Vis at $x + x^2 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{2^m} < 2010$ for alle positive heiltal m.