Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2008–2009

Finale 12. mars 2009

Abelkonkurransens finale består av 4 oppgaver (8 punkter) som skal løses i løpet av 4 timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. Begynn på nytt ark for hver oppgave.

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Det gir en poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

a. Vis at det finnes uendelig mange heltall som ikke kan skrives som differansen mellom to kvadrattall.

b. Vis at summen av tre kubikktall som kommer etter hverandre, alltid kan skrives som differansen mellom to kvadrattall.

(Et kvadrattall er et helt tall opphøyd i andre potens. Et kubikktall er et helt tall opphøyd i tredje potens.)

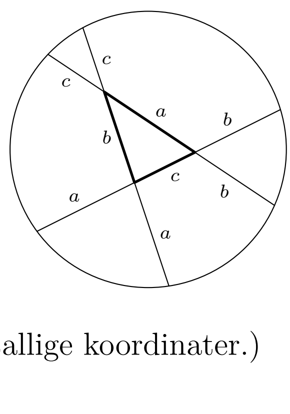
Oppgave 2

Det er to bokstaver i et språk. Alle ord består av sju bokstaver, og to forskjellige ord har alltid forskjellige bokstaver på minst tre plasser.

a. Vis at et slikt språk ikke kan ha flere enn 16 ord.

b. Kan det være 16 ord i språket?

Oppgave 3



a. I trekanten ABC har siden BC lengde a, siden AC lengde b og siden AB lengde c. Forleng alle tre sider i begge ender – med lengden a fra hjørne A, b fra B og c fra C. Vis at de seks endepunktene til de forlengede sidene alle ligger på en felles sirkel.

b. Vis at det for alle positive heltall n finnes en sirkel i planet som er slik at det nøyaktig er n gitterpunkter innenfor sirkelen. (Et gitterpunkt er et punkt med heltallige koordinater.)

Oppgave 4

a. Vis at $\left(\frac{2010}{2009}\right)^{2009} > 2$.

b. La $x = 1 - 2^{-2009}$. Vis at $x + x^2 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{2^m} < 2010$ for alle positive heltall m.