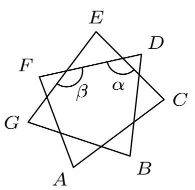
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2005–2006. *Løsning*

Andre runde 19. januar 2006

Oppgave 1. Det er to heltall med tre sifre som har 37 som de to første sifrene og som er delelig med 7, nemlig $53 \cdot 7 = 371$ og $54 \cdot 7 = 378$. Så $b = 53$ eller $b = 54$. Det er bare ett heltall med tre sifre som har 53 eller 54 som de to første sifrene og som er delelig med 11, nemlig $49 \cdot 11 = 539$. Så Ola skrev 49 på tavla. **49**

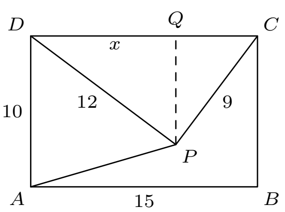
Oppgave 2. Arealet av trapeset er $\frac{1}{2} \cdot (10 + 6) \cdot 4 = 32$. Trekanten ABP har høyde $4/2 = 2$ fra AB og areal $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10$. Trekanten PCD har høyde 2 fra CD, og areal $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$. Trekantene PQC og QBC har samme lengde av grunnlinjene og samme høyde fra PB, og dermed samme areal, som blir $\frac{1}{2}(32 - 10 - 6) = 8$. **8**

Oppgave 3. Faktorisering gir $x^2 - 20x + 75 = (x - 5)(x - 15)$, som er positivt hvis og bare hvis $x \leq 4$ eller $x \geq 16$. Hvis $x \leq 3$ eller $x \geq 17$, blir uttrykket et sammensatt heltall, mens $x = 4$ og $x = 16$ begge gir primtallet 11. . . . . **20**



Oppgave 4. Vi kaller vinklene i den indre sjukanten $\alpha, \beta, \ldots$ Vinkelsummen i en firkant er $360°$, slik at $\alpha + F + A + C = 360°$. På samme måte er $\beta + G + B + D = 360°$. Hvis vi setter opp tilsvarende likning også for de fem andre vinklene i sjukanten og summerer de sju likningene, får vi $\alpha + \beta + \cdots + 3(A + B + \cdots + G) = 7 \cdot 360°$. Summen av vinklene i den indre sjukanten er $\alpha + \beta + \cdots = 5 \cdot 180°$, og vi får $5 \cdot 180° + 3(A + B + \cdots + G) = 7 \cdot 360°$, som gir $A + B + \cdots + G = 540°$. **540**

Oppgave 5. Hver gang to tall erstattes med et nytt på tavla, reduseres summen av tall på tavla med 10. Den opprinnelige summen var $1 + 2 + \cdots + 25 = 25 \cdot 26/2 = 325$, slik at vi etter å ha erstattet tall 24 ganger, får $325 - 240 = 85$. **85**



Oppgave 6. Fordi $9^2 + 12^2 = 15^2$, er trekanten CPD rettvinklet. La Q være fotpunktet for høyden fra P på CD. Da er trekantene QDP og PDC formlike, og høyden fra AD i trekanten DAP er dermed $x = 12 \cdot 12/15 = 48/5$. Arealet av trekanten APD er $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 48/5 = 48$. **48**

Oppgave 7. Summen i oppgaven er lik antall par (x, b) av hele tall som er slik at $100+b$ er delelig med x og $1 \leq b \leq x \leq 100$. (Hvis $b \leq 100 < x < 100+b$, er ikke $100+b$ delelig med x.) Men for hver x er nøyaktig ett av de x tallene 101, 102, …, $100+x$ delelig med x. Altså fins det for hver av de 100 mulighetene for x nøyaktig ett tall $b \leq x$ slik at $100+b$ er delelig med x, og antallet er 100. .... **100**

Oppgave 8. Skriv om ulikheten til $(x-y)^2 - (x-y) + 1/4 \leq 2y + 1/4$, altså $(x-y-1/2)^2 \leq 2y + 1/4$. Dette medfører at $y \geq -1/8$, da kvadratet er ikkenegativt. Når $y = -1/8$, er ulikheten bare oppfylt når kvadratet er null, dvs. for $x = 3/8$. Så $x_0 = 3/8$, og $40x_0 + 60 = 75$. **75**

Oppgave 9. La $f(x) = x^3 - (x+1)^3 - (x+2)^3 + (x+3)^3$. Da er summen i oppgaven lik $f(1)+f(5)+f(9)+f(13)+f(17)$. Ved å multiplisere ut og trekke sammen får vi $f(x) = 12x+18$, og summen blir $12(1+5+9+13+17)+5\cdot 18 = 630$. **630**

Oppgave 10. Vi markerer to seter med samme bokstav hvis de brukes av et ektepar. Vi har da disse 5 mulighetene hvis ingen ektefeller skal sitte ved siden av hverandre: $ABACBC$, $ABCABC$, $ABCACB$, $ABCBAC$ og $ABCBCA$. For hver av disse 5 mulighetene er det 6 muligheter for ekteparene å fordele seg på A, B og C – til sammen $5\cdot 6 = 30$ muligheter. For hver av disse 30 mulighetene er det 2 muligheter å fordele seg for ekteparet som er plassert på A-setene, og tilsvarende for de to andre ekteparene – til sammen $30 \cdot 2^3 = 240$ muligheter. **240**

Fasit

1		**49**	6		**48**
2		**8**	7		**100**
3		**20**	8		**75**
4		**540**	9		**630**
5		**85**	10		**240**

Hvis denne siden kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.