Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2005–2006. *Løsning*

Første runde   3. november 2005

Oppgave 1. Én prosent av tallet er $144/40 = 3{,}6$, så hundre prosent er 360.
. . . . **B**

Oppgave 2. Summen av lengdene av de vannrette linjestykkene er 20. Det samme gjelder de loddrette linjestykkene. . . . . **B**

Oppgave 3. $\sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$. . . . . **D**

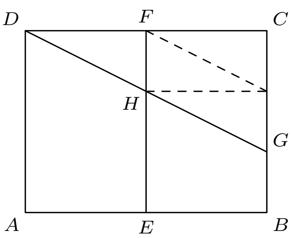
Oppgave 4. For hver av de tre forrettene er det fem muligheter for hovedretten – til sammen 15 kombinasjoner. For hver av de 15 kombinasjonene er det seks muligheter for desserten – til sammen $15 \cdot 6$ kombinasjoner. . . . . . **E**

Oppgave 5. $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \dfrac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$. . . . . **B**

Oppgave 6. La x være antall førsteklassinger. Da er $0{,}45x + 0{,}5(300-x) = 144$, $x = 120$. . . . . **E**

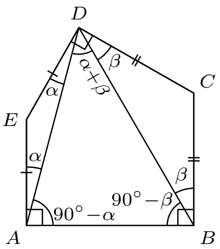
Oppgave 7. La sidene ha lengder x og y. Da er arealet $xy = 14$, og ved Pytagoras' setning er $x^2 + y^2 = 36$, slik at $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 36 + 2 \cdot 14 = 64$, og $x + y = 8$. Omkretsen er $2(x+y) = 2 \cdot 8 = 16$. . . . . . . **C**

Oppgave 8. Kall tallene x, y og z, der $x < y < z$. Da er $xy = 10$, $xz = 15$ og $yz = 24$. Så $y^2 = (xy)(yz)/(xz) = 10 \cdot 24/15 = 16$, slik at $y = 4$. . . . . . . **C**



Oppgave 9. Firkanten $HGCF$ kan deles opp i tre trekanter som er kongruente med trekanten HFD (se til venstre). Firkanten $EBGH$ er like stor som firkanten $HGCF$, så arealet av halve rektangelet $ABCD$ er seks ganger arealet av trekanten HFD. Arealet av hele rektanglet er 12 ganger så stort. . . . . **A**

Oppgave 10. Anta at $5x$ barn var ute og x inne før lunsj. Etter lunsj var det $5x + 3$ barn ute og $x - 3$ inne. Opplysningene fra oppgaven gir at $5x + 3 = 8(x-3)$, slik at $x = 9$. Tilsammen var det $x + 5x = 54$ barn i barnehagen. **D**



Oppgave 11. La α og β være størrelsen til henholdsvis vinkelen EDA og BDC. Da er vinklene BAD og DBA henholdsvis $90^\circ - \alpha$ og $90^\circ - \beta$ (trekantene ADE og DBC er likebeinte). Vinkelsummen i trekanten ABD er 180°, så vinkelen ADB er lik $\alpha + \beta$. Fordi vinkelen EDC er rett, er $90^\circ = \alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 2(\alpha + \beta)$, og $\alpha + \beta = 45^\circ$. .... **C**

Oppgave 12. For å få ned 7 hamburgere, bruker han $1+2+4+8+16+32+64 = 127$ minutter, som han greier innen de 240 minuttene konkurransen varer. For å få ned 8 hamburgere, ville han imidlertid ha brukt $127 + 128 = 255$ minutter. .... **A**

Oppgave 13. La $A = 100x + 10y + z$, der x, y og z er hele tall, $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$. Da er $100x+10y+z = 6(10x+z)$, som gir $8x+2y = z$. Fordi $z \leq 9$, er $x = 1$, og fordi $x = 1$ og $z \leq 9$, er $y = 0$, slik at $z = 8$. Summen av sifrene er 9. .... **B**

Oppgave 14. Ved Pytagoras' setning har CE lengde $\sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 1{,}5$. Lengden av ED er dermed 0,5. Fordi trekantene BCE og EDF er formlike, med FE svarende til EB og ED svarende til BC, har FE lengde $2{,}5 \cdot 0{,}5/2 = 0{,}625$. .... **B**

Oppgave 15. Hus nr. 1 kan males på 2 måter. For hver av disse mulighetene kan hus nr. 2 males på 2 måter – til sammen 2^2 muligheter. For hver av disse mulighetene kan hus nr. 3 males på 2 måter – til sammen 2^3 muligheter. Fortsetter vi slik, ser vi at husene kan males på 2^9 måter. Halvparten av disse, $2^8 = 256$ måter, har færre røde enn blå hus. .... **D**

Oppgave 16. $2(a^2 - b^2)^2 = 2((a - b)(a + b))^2 = 2(a - b)^2(a + b)^2$, så fra opplysning gitt i oppgaven er $(a + b)^4 = 2(a - b)^2(a + b)^2$, slik at $(a + b)^2 = 2(a - b)^2$, som gir $a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 - 4ab + 2b^2$, altså $a^2 + b^2 = 6ab$. Fordi $a^2 + b^2 = 30$, er $ab = 5$. .... **A**

Oppgave 17. $5/4 < \sqrt{2}$ fordi $(5/4)^2 = 25/16 < 2 = (\sqrt{2})^2$, og $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5}$ fordi $(\sqrt{2})^4 = 4 < 5 = (\sqrt[4]{5})^4$. Videre er $\sqrt[5]{5}$ opplagt mindre enn $\sqrt[4]{5}$, og gjennomsnittet $(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{4})/2$ av disse to er også mindre enn $\sqrt[4]{5}$. .... **C**

Oppgave 18. La r være radius i halvsirkelen der hypotenusen er diameter. Ved Pytagoras' setning er $(2r)^2 = 10^2 + 7^2 = 149$, slik at $r^2 = 149/4$, og arealet av halvsirkelen er $\frac{1}{2}\pi r^2 = 149\pi/8$. Trekanten har areal $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 = 35$, og arealet av det av halvsirkelen som ligger utenfor trekanten er $149\pi/8 - 35$. Trekker vi dette fra arealet av de to halvsirklene der katetene er diametre, får vi $49\pi/8 + 100\pi/8 - 149\pi/8 + 35 = 35$. .... **D**

Oppgave 19. La x være sannsynligheten for at Arild vinner. Da er $1 - x$ sannsynligheten for at Berit vinner. Hvis de spiller spillet mange ganger, vinner Arild på første kast i 1/6 av tilfellene. I de 5/6 av tilfellene der det ikke skjer, har Berit samme sannsynlighet for å vinne som det Arild har i utgangspunktet. Berits sannsynlighet for å vinne er altså 5/6 av Arilds sannsynlighet for å vinne. Så $1 - x = \frac{5}{6}x$, slik at $x = 6/11$. .... **A**

Oppgave 20. For at $184n = 2^3 \cdot 23 \cdot n$ skal være et kvadrattall, må alle primfaktorene i produktet forekomme i partallspotens. Det minste tallet n som sørger for dette, er $2 \cdot 23 = 46$, for da blir $184n = 2^4 \cdot 23^2$. .... **D**

Fasit

1		B	11		C
2		B	12		A
3		D	13		B
4		E	14		B
5		B	15		D
6		E	16		A
7		C	17		C
8		C	18		D
9		A	19		A
10		D	20		D

Hvis denne siden kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.