Abel-konkurransen 2003–2004

FINALE - 11. mars 2004

Tid: 4 timer
På hver oppgave gis det inntil 10 poeng

Oppgave 1

a) La m være et positivt heltall. Vis at 2^m ikke kan skrives som en sum av to eller flere påfølgende positive heltall.

b) La $a_1, a_2, a_3, \ldots$ være en følge av positive heltall slik at $a_i < a_{i+1}$ for alle $i \in \mathbb{N}$. Et tall a_n i følgen kalles *lykkelig* dersom a_n kan skrives som en sum av andre, ikke nødvendigvis forskjellige, tall i følgen. I motsatt fall kaller vi a_n *ulykkelig*. (Hvis for eksempel følgen starter med $4, 6, 14, 15, 25\ldots$, så er tallene 4, 6 og 15 ulykkelige, mens $14 = 4 + 4 + 6$ og $25 = 4 + 6 + 15$ er lykkelige.) Vis at det bare er endelig mange ulykkelige tall i følgen.

Oppgave 2

a) Vis at for alle reelle tall x, y og z, gjelder ulikheten

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

b) La a, b og c være positive reelle tall slik at $a + b + c \geq abc$. Vis at da gjelder ulikheten

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

Oppgave 3

I firkanten $ABCD$ er $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$ og $\angle C = 120°$. Skjæringspunktet M mellom diagonalene i firkanten er slik at $BM = 1$ og $MD = 2$.

a) Vis at hjørnene i $ABCD$ ligger på en sirkel og finn radien i denne sirkelen.

b) Finn arealet av firkanten $ABCD$.

Oppgave 4

På en stillehavsøy bor det n personer, der n er et partall. Hvert par av personer er enten venner eller uvenner. Høvdingen på øya bestemmer at alle skal lage seg et halsbånd med steiner av ulike slag, etter følgende regel: To personer skal ha minst en felles steintype i sine halsbånd hvis og bare hvis de er venner.

a) Vis at det kan være nødvendig med $n^2/4$ ulike typer steiner for å lage alle halsbåndene.

b) Vis at det ikke er nødvendig med mer enn $n^2/4$ ulike typer steiner for å lage halsbåndene.