Abel-konkurransen 2002–2003

Fasit til andre runde

Oppgave 1: Klokka 09.00 er vinkelen mellom viserne $90°$. 20 minutter senere har minuttviseren flyttet seg $120°$ mens timeviseren har flyttet seg $10°$. Vinkelen mellom viserne er nå $90° + 120° - 10° = 200°$ på oversiden, og dermed $160°$ på undersiden. **160**

Oppgave 2: Vi ser at $1 \star 2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$ og at $1 \star 0 = 1^2 + 3^0 = 1 + 1 = 2$. Dermed er uttrykket i oppgaven lik $10 \star 2 = 10^2 + 3^2 = 100 + 9 = 109$. **109**

Oppgave 3: Vi regner ut $a_1 = 20$, $a_2 = 15$, $a_3 = 24$, $a_4 = 38$, $a_5 = 43$, $a_6 = 34$, $a_7 = 20$ og $a_8 = 15$. Vi ser av dette at følgen er periodisk med periode 6. Siden $2003 = 6 \cdot 333 + 5$, får vi at $a_{2003} = a_5 = 43$. **43**

Oppgave 4: Siden summen av vinklene i en trekant er $180°$, blir $\angle CDB = 78°$. Tilsvarende får vi at $\angle CEB = 51°$. Dermed er trekant BCD likebent med $BC = DC$, og trekant BCE er likebent med $BC = CE$. Det følger at $CD = CE$ og at trekant CED er likebent. Siden $\angle DCE = 54°$, blir $\angle CED = \angle CDE = 63°$. Dermed er $\angle BED = 63° - 51° = 12°$. **12**

Oppgave 5: Kvadrerer vi begge sider, får vi $252 + 144\sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}$. Dette gir likningene $a^2 + 3b^2 = 252$ og $ab = 72$. Fra den første av disse, ser vi at $b^2 < 84$, og dermed er $0 < b < 10$. (Hvis $b < 0$, så blir av $ab = 72$ også $a < 0$, men dette strider mot at $a + b\sqrt{3} > 0$.) Ved å prøve, finner vi at $b = 6, a = 12$ er eneste mulighet. **18**

Oppgave 6: Observer at summen av alle tallene er 55. Antall delmengder med 5 elementer er lik binomialkoeffisienten (10 5)= 252. For hver delmengde med sum ≤ 27, så vil komplementet ha sum > 27, og omvendt. Altså vil nøyaktig halvparten av delmengdene ha en sum som er større enn 27, dvs. $252/2 = 126$ delmengder. **126**

Oppgave 7: Primtallene fra 2 til 47 er $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$. Det siste sifferet i produktet vil være 0, siden $2 \cdot 5 = 10$ er en faktor. Det nest siste sifferet vil være lik det siste sifferet i produktet av primtallene $3, 7, 11, \ldots, 47$, som igjen er lik det siste sifferet i produktet av tallene $3, 7, 1, 3, 7, 9, 3, 9, 1, 7, 1, 3, 7$. Det er lett å sjekke at dette produktet ender på 1, og dermed slutter det søkte produktet på 10. **10**

Oppgave 8: De to trekantene ABS og CDS er formlike, og arealet av ABS er fire ganger så stort som arealet av CDS. Sidelengdene i ABS er derfor dobbelt så store som sidene i CDS. Dermed er $AS = 2SC$ og arealet av ASD er to ganger arealet av SCD, dvs. 12. Tilsvarende er arealet av BCS lik 12, og arealet av trapeset blir $6 + 24 + 12 + 12 = 54$. **54**

Oppgave 9: Sett fra det største tallet, må de andre tallene komme i synkende rekkefølge i begge retninger. En slik rekkefølge bestemmes derfor unikt ved å angi den delmengden av de 6 laveste tallene som skal komme før det største tallet. Antall delmengder av en mengde med 6 elementer er $2^6 = 64$. **64**

Oppgave 10: Siden b^4 er en 3.potens, må også b være en tredjepotens, og vi kan skrivs $b = u^3$. Tilsvarende er c en sjettepotens, og vi kan skrive $c = v^3$. Siden $b-c = u^3-v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2) = 61$ og 61 er et primtall, ser vi at $u-v = 1$ og $u^2 + uv + v^2 = 61$. Her er $u = 5, v = 4$ eneste løsning i positive heltall, og vi får at $a = u^4 = 625$ og $d = v^{5/2} = 2^5 = 32$. Dermed er $a - d = 625 - 32 = 593$.

593

FASIT:

1:	160	6:	126
2:	109	7:	10
3:	43	8:	54
4:	12	9:	64
5:	18	10:	593