# Abelfinalen 2001-02 - Løsninger

**Oppgave 1.** **a)** Anta at $k+1 = m^2$ og $16k+1 = n^2$ der $m$ og $n$ er positive hele tall. Da er $16m^2 - n^2 = 15$, og vi får faktoriseringen $15 = (4m+n)(4m-n)$. Tallet 15 kan faktoriseres enten som $15 \cdot 1$ eller $5 \cdot 3$. Det første tilfellet gir $4m+n = 15, 4m-n = 1$, og vi får $m = 2, n = 7$ og $k = 3$. Det andre tilfellet gir $4m+n = 5, 4m-n = 3$, og dermed $m = n = 1$ og $k = 0$. De eneste mulighetene er derfor $k = 3$ (som gir kvadratene 4 og 49) og $k = 0$ (som gir kvadratene 1 og 1).

**b)** Vi ser først på tilfellet $c = 0$: Da må $2a + b = 2b + a = \pm 1$. $2a + b = 1$ gir $b = 1 - 2a$, som innsatt gir $2b + a = 2 - 3a$, som ikke kan være lik 1. Tilsvarende ser vi at $2b + a = -1$ ikke går. Altså er ikke $c = 0$ noen mulighet.

Hvis $c = 1$, så har vi løsningen $a = 3, b = -1$. Hvis $c = 2t + 1$ er et oddetall, har vi løsningen $a = 3 \cdot 5^t, b = -5^t$.

Anta nå at $c$ er et positivt partall, og at likningen har en løsning. Ved om nødvendig å skifte fortegn på $a$ og $b$, kan vi anta at både $2a + b$ og $2b + a$ er positive. Hvis $2a + b$ og $2b + a$ er delelige med 5, så er også $2a + b - 2(2b + a) = -3b$ delelig med 5. Men da er $b$, og dermed også $a$, delelig med 5, og likningen kan forkortes med $5^2$. Fortsetter vi slik, ender vi opp med en løsning der en av faktorene, for eksempel $2a + b$, er lik 1. Den andre faktoren, $2b + a$, må dermed være lik $5^c$. Siden $b = 1 - 2a$, får vi at $5^c = 2b + a = 2 - 3a$, som gir $5^c \equiv 2 \pmod 3$. Men siden $c$ er et partall har vi at $5^c = 5^{2u} = 25^u \equiv 1^u \equiv 1 \pmod 3$. Dette gir en motsigelse. Altså finnes det ingen løsninger der $c$ er et positivt partall.

Likningen har altså heltallige løsninger hvis og bare hvis $c$ er et positivt oddetall.

**Oppgave 2.** **a)** Siden $x > 0$, er $x + 1/x \geq 2$ ekvivalent med $x^2 + 1 \geq 2x$. Dette kan omskrives til $(x-1)^2 \geq 0$ som opplagt er sant.

**b)** Det følger fra a) at $x_i y_i + x_i/y_i \geq 2x_i$. Bruker vi dette, får vi

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) &\leq (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) + (\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}) \\ &\leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}). \end{aligned}$$

Hvis vi trekker fra $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, har vi den ønskede ulikhet.

**c)** Vi har at $(a^2+b^2)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$, og at $(a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 = a^6 + 9a^2b^4 - 6a^4b^2 + b^6 + 9a^4b^2 - 6a^2b^4 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = (a^2+b^2)^3$. Dermed er $(a^2+b^2)^3 = 8^2 + 11^2 = 185$, og vi får at $a^2 + b^2 = \sqrt[3]{185}$.

**Oppgave 3.** **a)** La $T$ være punktet der $KL$ tangerer sirkelen. Observer at $OK$ halverer $\angle MOT$, og at $OL$ halverer $\angle NOT$. Dermed er $\angle KOL = \frac{1}{2}\angle MON = 90°$, og følgelig ligger $O$ på sirkelen som har $KL$ som diameter.

**b)** Nei, det finnes ingen slik kule. Anta, for motsigelse, at en slik kule finnes. La tetraederets 4 hjørner være $A$, $B$, $C$ og $D$, og la punktene der kulen tangerer sidene $AB$, $AC$ og $AD$ være henholdsvis $P$, $Q$ og $R$. Planet utspent av trekanten $ABC$ snitter kulen i trekantens innskrevne sirkel. Spesielt er $AP = AQ$. Tilsvarende får vi $AQ = AR$, og dermed er $AP = AQ = AR = a$. Tilsvarende lar vi den felles avstanden fra $B$ til de 3 nærmeste tangeringspunktene være $b$, og avstanden fra $C$ og $D$ til de nærmeste tangeringspunktene kaller vi henholdvis $c$ og $d$.

Summen av lengdene til de 6 kantene kan nå uttrykkes både som $3(a+b+c+d)$ og $17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 23$. Siden den siste summen ikke er delelig med 3, så kan ikke $a + b + c + d$ være et heltall. Men $a + b + c + d$ er jo summen av to sidelengder: $AB + CD$. Dette er et heltall, og vi har den ønskede motsigelse.

**Oppgave 4.** Vi vil bare gi løsning på c). Punktene a) og b) følger som spesialtilfeller.

Britt har en vinnende strategi hvis og bare hvis $N$ er delelig med 6. Hvis $N$ er delelig med 6 vinner Britt på følgende måte:

Hvis Arne sier et partall, så sier Britt tallet 2, Arne må si enten 1, 2 eller 3, og Britt kan si $N$. Hvis Arne sier et oddetall $k$, så sier Britt $3k$. Hvis Arne nå sier $3k \pm 1$ (et partall), så vinner Britt som over. Hvis Arne sier $3k$, så sier Britt 3, Arne sier sannsynligvis 4 (2 eller 3 lar Britt få si $N$ med en gang), Britt sier 2 og vinner som over.

Anta nå at $N$ ikke er delelig med 6. Hver gang det er Arne sin tur har han 3 påfølgende tall å velge mellom. Hvis noen av disse er større enn $N$, kan han alltid finne et som ikke er delelig med $N$. Hvis ingen av tallene er større enn $N$, så velger Arne et partall dersom $N$ ikke er delelig med 2, og et tall delelig med 3 dersom $N$ ikke er delelig med 3. ($N$ er jo ikke delelig med både 2 og 3.) Hvis Arne følger denne strategien, får aldri Britt sjansen til å si $N$.