Abel-konkurransen 2000–2001

Fasit til andre runde

Oppgave 1: Siden det var 25 som spiste pølser, og 9 som spiste begge deler, må 16=25-9 av personene bare ha spist pølser. Tilsvarende ser vi at 7 personer bare spiste hamburgere. Dermed har vi 5 personer som ikke spiste noe, 7 som bare spiste hamburgere, 16 som bare spiste pølser, og 9 som spiste begge deler. Totalt var det altså $5 + 7 + 16 + 9 = 37$ personer på festen. **37**

Oppgave 2: La sidelengdene være x og y der $x > y$. $x^2 - y^2 = 121$ gir at $(x + y)(x - y) = 121 = 11 \cdot 11$. Siden både x og y er heltall, og $x > y > 0$, blir eneste mulighet at $x + y = 121$ og $x - y = 1$, altså $x = 61$ og $y = 60$. **61**

Oppgave 3: Setter vi inn $x = k$ får vi $f(k) = k^2 - 6k$. $f(k) = -9$ er nå en 2.gradslikning med $k = 3$ som eneste løsning. Dermed er $f(x) = x^2 - 7x + 3$ og vi får at $f(-1) = 11$. **11**

Oppgave 4: La $S_n = n(n+1)(n+2)$ være summen av de n første tallene i følgen. Det 10. tallet er da gitt som $S_{10} - S_9 = 10 \cdot 11 \cdot 12 - 9 \cdot 10 \cdot 11 = 10 \cdot 11(12 - 9) = 330$. **330**

Oppgave 5: Observer først at en sekskant med n mynter på hver sidekant har totalt $6(n-1)$ mynter langs kantene. Totalt trengs altså $1+6+2\cdot 6+\ldots+(n-1)\cdot 6$ for å lage en sekskant med n mynter langs hver kant. Setter vi $n = 18$ får vi $1 + 6 \cdot (1 + 2 + \ldots + 17)=1 + 6 \cdot 153 = 919$. **919**

Oppgave 6: Observer først at $1x + 2x + 3x + \ldots + 99x = (99 \cdot 100/2)x = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot x$. For at et heltall skal være et kvadrat må alle eksponentene i primtallsfaktoriseringen være partall. x må altså ha både 2 og 11 som faktorer, og $x = 22$ er minste mulighet. **22**

Oppgave 7: Trekk normaler fra D og E ned på AC og kall fotpunktene henholdsvis F og G. Da er trekantene AFD og CGE kongruente, og det følger at $AF = CG = (17 - 11)/2 = 3$. Siden trekantene AFD og ADC er formlike, har vi at $AD/AF = AC/AD$. Det vil si at $x/3 = 17/x$ som gir at $x^2 = 51$. **51**

Oppgave 8: Det spilles 13 runder, og i hver runde deles det ut 14 poeng. Totalt vil lagene altså få $13 \cdot 14 = 182$ poeng. Det er mulig å rykke ned med 15 poeng ved at de 12 første lagene ender på 15 poeng, og de to siste lagene tilsammen får to poeng. (Merk at $12 \cdot 15 + 2 = 182$.) Dette kan for eksempel skje ved at de 12 første lagene spiller uavgjort i alle sine innbyrdes kamper, og at de vinner alle sine kamper mot de to andre lagene. Hvis et lag får 16 poeng eller mer så er det ikke mulig at 11 andre lag kommer foran, fordi dette ville gi minst $16 \cdot 12 = 192$ poeng totalt. **16**

Oppgave 9: Den første likningen kan skrives $(x-y)(x-2y+1) = 0$ som gir $x = y$ eller $x = 2y - 1$. Setter vi $x = y$ inn i den andre likningen får vi $2y = 0$, altså $x = y = 0$. Setter vi inn $x = 2y - 1$ får vi etter litt utregning $y^2 - 5y + 6 = 0$ som har løsningene $y = 2$ og $y = 3$. Likningssystemet har dermed $(x, y) = (0, 0), (3, 2), (5, 3)$ som de eneste løsningene. Største verdi for summen $x + y$ er dermed 8. **8**

Oppgave 10: Vi ser at $A_1 + A_2 = A_3 + A_2$, altså er $A_1 = A_3$. På grunn av likeformethet har vi at $A_2 = 4A_4$. Videre er $A_1 + A_2 = A_1 + 4A_4 = 3\sqrt{18}$ og $A_1 + A_4 = \frac{3}{2}\sqrt{18}$. Dette gir $A_4 = \frac{1}{2}\sqrt{18}$ og dermed $A_2 = 2\sqrt{18}$ og $A_1 = A_3 = \sqrt{18}$. Produktet av arealene blir $\sqrt{18}^4 = 18^2 = 324$. **324**