Abel-konkurransen 2000–2001

Fasit til første runde

Oppgave 1: $0.25/0.25 = 1$ **E**

Oppgave 2: 13. **B**

Oppgave 3: $6y - 4x = -2(2x - 3y) = -2 \cdot 4 = -8$.

C

Oppgave 4: Antall elever = 6 ganger antall lærere. Dette kan uttrykkes ved $E = 6L$.
D

Oppgave 5: De odde divisorene i $72 = 3^2 \cdot 2^3$ er 1, 3 og 9, altså 3 odde divisorer.
D

Oppgave 6: Det er 7 kuler av hver farge. Totalt er det 21 kuler. **C**

Oppgave 7: La s være siden og h høyden i trekanten. Ved Pythagoras er $h^2 + (s/2)^2 = s^2$ som gir at $h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$. Arealet er dermed gitt ved $A = hs/2 = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. $A = 12\sqrt{3}$ gir nå $s^2 = 48$ som igjen gir at omkretsen $3s = 12\sqrt{3}$. **D**

Oppgave 8: Ingen av tallene er partall. **A**

Oppgave 9: Antall måter å velge 4 objekter fra en mengde med 7 objekter er lik binomialkoeffisienten $\binom{7}{4} = (7 \cdot 6 \cdot 5)/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 35$. **B**

Oppgave 10: La de A, B, C, D, E være de 5 spissene på stjernen i denne rekkefølgen mot klokka. La F og G være punktene der AC skjærer henholdsvis BE og BD. Betrakter vi trekant CEF ser vi at $\angle EFC = 180° - 2v$ altså er $\angle CFB = 2v$. Tilsvarende er $\angle AGB = 2v$. Summen av vinklene i trekant BFG er nå $5v$, og det følger at $v = 36°$.
D

Oppgave 11: Hvis vi opphøyer de fem tallene i 60. potens får vi henholdsvis $30^2 = 900$, $2^{10} = 1024$, $3^6 = 729$, $4^5 = 1024$ og $5^4 = 625$, og vi ser at det er det siste tallet som er minst. **E**

Oppgave 12: Anta at $m = 10a + b$ er et tosifret tall. Vi ønsker å finne antall slike m som tilfredsstiller $m = ab + a + b$. Men $10a + b = ab + a + b$ er ekvivalent med $9a = ab$. Siden $a \geq 1$ får vi at $b = 9$, mens a kan være $1, 2, \ldots, 9$. Totalt har vi altså 9 muligheter for m: $19, 29, 39, \ldots, 99$. **E**

Oppgave 13: Sannsynligheten endres ikke om man tar ut en sokk av gangen. Etter at man har tatt ut den første sokken er det 59 sokker igjen, og av disse er det 19 som har samme farge som den første. Sannsynligheten for at den andre er av samme farge er dermed 19/59. **C**

Oppgave 14: Observer først at høyden av tunnelen er $2R$. Tegn et kvadrat med sidelengde $2R$ slik at den ene siden ligger langs den vannrette linjen og hver av de tre andre sidene tangerer kurven formet av kvartsirklene. De to delene av tverrsnittet som nå ligger utenfor kvadratet har akkurat samme form og areal som de delene av kvadratet som ligger utenfor tverrsnittet. Tverrsnittet og kvadratet har altså samme areal, $4R^2$. **C**

Oppgave 15: De tre vinklene er $v \leq w \leq 5v$ der vi vet at $5v < 90°$ og at $6v + w = 180°$. Siden $w < 90°$ er $6v > 90°$. Vi har altså at $15° < v < 18°$. Det gjenstår to muligheter $v = 16°$ og $v = 17°$. $v = 16°$ gir $5v = 80°$ og $w = 84°$ som strider mot forutsetningen $w \leq 5v$. $v = 17°$ gir $5v = 85°$ og $w = 78°$ som passer. Summen av de to største vinklene er $85° + 78° = 163°$. **C**

Oppgave 16: Et tall er delelig med 6 hvis og bare hvis tallet er delelig med både 2 og 3. Et tall er delelig med 3 hvis og bare hvis summen av sifrene i tallet er delelig med 3. Siden summen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ er delelig med 3, vil vårt 6-sifrede tall helt sikkert være delelig med 3. Tallet er delelig med 2 hvis og bare hvis det siste sifferet er et partall, dvs. 2, 4 eller 6, og dette skjer i 50% av tilfellene. **C**

Oppgave 17: Tegn et kvadrat med hjørner i sentrene for de 4 små sirklene. Dette kvadratet har sidelengde 2, og diagonal $2\sqrt{2}$. Den store sirkelens diameter er lik kvadratets diagonal pluss to ganger radien i de små sirklene, dvs. $2\sqrt{2} + 2$. Radien er halvparten av dette, altså $\sqrt{2} + 1$. **D**

Oppgave 18: Vi ser at likningen har de 4 løsningene ± 2000 og $\pm 1/2000$. Multipliseres likningen med x^2 får vi en 4.gradslikning som vi vet har maksimalt 4 løsninger. Antall løsninger er dermed 4. **D**

Oppgave 19: Anta at rektangelet har areal 1. Trekantene AOI og DOI har samme grunnlengde og samme høyde og har dermed samme areal x. Tilsvarende har COJ og DOJ samme areal y. Begge trekantene AJD og CDI har areal lik $1/4$. Siden arealene av AJD og CDI kan skrives som henholdsvis $x + x + y$ og $x + y + y$ får vi at $x = y = 1/12$. Dermed er arealet av $DIOJ$ $2/12$, mens arealet av $ABCO$ er $8/12$. Forholdet blir dermed $1/4$. **A**

Oppgave 20: Banens omkrets er 400π (benevninger droppes). Anta at de to syklistene sykler med hastigheter x og y der $x \geq y$. Når de sykler motsatt vei, møtes de hvert femtiende sekund. Det betyr at de tilsammen har syklet 400π på 50 sekunder, slik at vi får likningen $x + y = 400\pi/50 = 8\pi$. Tilsvarende får vi i det andre tilfellet at $x - y = 400\pi/100 = 4\pi$. Løser vi disse likningene får vi $x = 6\pi$ og $y = 2\pi$.

B