Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Finale 2020–2021 – *Løsninger*

8. mars 2021

Oppgave 1.

a. Antall $3n$-tabeller er $(3n)!$, siden det er antall måter å ordne $3n$ tall på. Du kan *rydde* en vilkårlig $3n$-tabell, ved først å ordne tallene i hver kolonne i stigende rekkefølge, og deretter ordne kolonnene etter det øverste tallet i kolonnen, med en ryddig tabell som resultat. For hver ryddig $3n$-tabell T finnes det $(3!)^n \cdot n! = 6^n \cdot n!$ tabeller som resulterer i T når du rydder dem: Du kan stokke om de n kolonnene på $n!$ måter, og så kan du stokke om hver kolonne på $3! = 6$ måter. Det følger at antall ryddige tabeller er $(3n!)/(6^n \cdot n!)$.

b. Ettersom Pål kan komme til å rote bort tre bokser, må han ha minst fire kort for hver høne, plassert i hver sin boks, for ikke å risikere å miste alle kortene for en høne. Hvis en høne bare har tre kort, kan han jo miste alle ved å rote bort tre bokser. Dersom han har H høner, trenger han altså $4H$ kort. Boksene har til sammen kapasitet for $10 \cdot 2021 = 20210$ kort, så $4H \leq 20210$, og dermed $H \leq 5052$.

Pål kan fordele kort for 5052 høner slik: Kortene for de første ti hønene plasserer han i boksene med nummer henholdsvis $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, …, $\{7, 8, 9, 10\}$, $\{8, 9, 10, 1\}$, $\{9, 10, 1, 2\}$ og $\{10, 1, 2, 3\}$. Så har han fordelt kortene for de første ti hønene med fire kort per boks. Deretter gjør han det samme med de neste ti hønene, og så videre inntil han har fordelt kortene for 5050 høner med $4 \cdot 505 = 2020$ kort per boks. Så har han plass til fire kort hver for de to siste hønene, fordelt på åtte av boksene, med bare to kortplasser til overs.

Oppgave 2.

a. Løsning for $n = 3$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+4+2}{12} = 1.$$

Dersom vi har en løsning med $n \geq 3$ forskjellige nevnere,

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1,$$

kan vi lage en ny løsning med $n+1$ forskjellige tall slik:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \cdots + \frac{1}{2x_n} = 1.$$

(Merk at $x_j > 1$ for alle j, så de nye nevnerne er også forskjellige.) På denne måten kan vi konstruere nye løsninger i tur og orden for $n = 4, 5, \ldots$.

Det er mange måter å produsere nye løsninger på, for eksempel

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n + 1} + \frac{1}{x_n(x_n+1)} = 1$$

der x_n er den største av nevnerne i den forrige løsningen.

b. En god start er ulikheten

$$(p^2 - a^2)(q^2 - b^2) \leq (pq - ab)^2,$$

som følger av ulikheten $(aq - bp)^2 \geq 0$ når man ganger ut alle parentesene. Med $p = q = 1$ og $a = a_1$, $b = b_1$, får vi tilfellet $n = 1$ i ulikheten som skulle vises.

Med tilleggsbetingelsene $|a| \leq p$ og $|b| \leq q$ blir $pq - ab \geq 0$, slik at vi også kan skrive

$$\sqrt{p^2 - a^2} \cdot \sqrt{q^2 - b^2} \leq pq - ab. \tag{$*$}$$

Nå kan vi sette $p_n = \sqrt{1 - (a_1^2 + \cdots + a_n^2)}$, $q_n = \sqrt{1 - (b_1^2 + \cdots + b_n^2)}$ og $r_n = 1 - (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)$. (Ved antagelsen i oppgaven er innholdet i rottegnene ≥ 0.) Vi skal vise ved induksjon på n at $p_n q_n \leq r_n$.

Vi har allerede vist ulikheten for $n = 1$. Anta nå at $p_n q_n \leq r_n$ for en gitt $n \geq 1$. Vi har $p_{n+1} = \sqrt{p_n^2 - a_{n+1}^2}$ og $q_{n+1} = \sqrt{q_n^2 - b_{n+1}^2}$, så vi kan anvende $(*)$ og få

$$\begin{aligned} p_{n+1} q_{n+1} &= \sqrt{p_n^2 - a_{n+1}^2} \cdot \sqrt{q_n^2 - b_{n+1}^2} \\ &\leq p_n q_n - a_{n+1} b_{n+1} \\ &\leq r_n - a_{n+1} b_{n+1} = r_{n+1}, \end{aligned}$$

som fullfører induksjonstrinnet, og dermed beviset.

Oppgave 3.

a. Tabellen til høyre viser at $k = 0, 3, 4, 6$ og 7 oppfyller den oppgitte betingelsen. Fordi alle kvadrattall er kongruent med 0 eller 1 modulo 3, må alle $k \equiv 2 \bmod 3$ utelukkes.

0	$3^3 + 3^2 + 0 = 6^2$
1	$1 \equiv 1 \bmod 8$
2	$2 \equiv 2 \bmod 3$
3	$3^1 + 3^1 + 3 = 3^2$
4	$3^1 + 3^2 + 4 = 4^2$
5	$5 \equiv 2 \bmod 3$
6	$3^1 + 3^3 + 6 = 6^2$
7	$3^2 + 3^2 + 7 = 5^2$
8	$8 \equiv 2 \bmod 3$
9	$9 \equiv 1 \bmod 8$

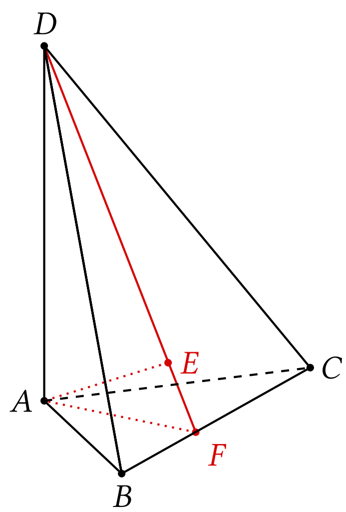
Det gjenstår å utelukke $k = 1$ og $k = 9$. For å gjøre det, kan vi regne modulo 8. Vi har $k \equiv 1 \bmod 8$ enten $k = 1$ eller $k = 9$. Videre er $3^n \equiv 1 \bmod 8$ dersom n er et partall, og $3^n \equiv 3 \bmod 8$ dersom n er et oddetall. Regnet modulo 8 er det da tre muligheter for $3^m + 3^n$: Nemlig 2, 4 og 6. Legger vi så til $k \equiv 1 \bmod 8$, får vi 3, 5 og 7. Men kvadratene modulo 8 er 0, 1 og 4, og fordi $\{3, 5, 7\} \cap \{0, 1, 4\} = \emptyset$, kan vi ikke ha $k \equiv 1 \bmod 8$.

b. Vi kan se på tall med bare to enere og resten nuller, altså tall på formen $a = 10^n + 10^k$ med $0 \leq k < n$: Det gir $a^2 = 10^{2n} + 2 \cdot 10^{n+k} + 10^{2k}$. Ettersom $2k < n + k < 2n$, har a^2 to enere, én toer, og resten nuller, i alt $2n + 1$ siffer, og dermed $2n - 2$ nuller. Så mengden av alle slike tall med en gitt n er synkron. Ved å velge $n = 2021$ og $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2020\}$, får vi en synkron tallmengde med 2021 tall.

Oppgave 4.

a. Før vi begynner, må vi ha et par ting klart for oss: Hvis to linjer i rommet har et felles punkt og vinkelen mellom de to linjene er rett, kaller vi linjene ortogonale. To linjer som ikke har noe punkt felles, kalles ortogonale dersom de møtes i en rett vinkel etter at den ene linjen parallellforskyves inntil de har et felles punkt. Gitt en linje og et plan i rommet, kan vi si at linjen og planet er ortogonale dersom linjen er ortogonal på alle linjer i det gitte planet. Men det er tilstrekkelig at bare to ikkeparallelle linjer i dette planet er ortogonale på den gitte linjen.

La nå E være fotpunktet til normalen fra det rektangulære hjørnet A til siden BCD. Fordi både linjene[1] AD og AE står ortogonalt på BC, er planet som inneholder A, D og E ortogonalt på BC. Spesielt er både AF og DF ortogonale på BC.



Trekanten ADF har en rett vinkel i A, og E er fotpunktet til høyden fra A til DF. Siden de to trekantene EAF og ADF er likeformede, er $|EF/AF| = |AF/DF|$, eller med andre ord, $|AF|^2 = |DF| \cdot |EF|$. Dersom vi nå multipliserer begge sider med $\frac{1}{4}|BC|$, kan vi slutte at

$$\operatorname{areal}(BAC)^2 = \operatorname{areal}(BCD) \cdot \operatorname{areal}(BEC).$$

På samme måte blir

$$\operatorname{areal}(CAD)^2 = \operatorname{areal}(BCD) \cdot \operatorname{areal}(CED),$$
$$\operatorname{areal}(DAB)^2 = \operatorname{areal}(BCD) \cdot \operatorname{areal}(DEB).$$

Legger vi disse sammen og benytter at $\operatorname{areal}(BEC)+\operatorname{areal}(CED)+\operatorname{areal}(DEB) = \operatorname{areal}(BCD)$, så får vi $\operatorname{areal}(BAC)^2+\operatorname{areal}(CAD)^2+\operatorname{areal}(DAB)^2 = \operatorname{areal}(BCD)^2$.

[1] Vi skriver kort «linjen AD» for linjen gjennom A og D.

b. Vi jobber baklengs. Merk at vi har to forskjellige situasjoner, avhengig av om B ligger mellom A og D (figuren til venstre) eller om A ligger mellom B og D (figuren til høyre). La G være punktet på BC slik at $|DG| = |CD|$ og $G \neq C$. Vi trenger bare å vise at $|BG| = \big||CD|^2 - |BD|^2\big|/|BC|$, for da må G være E eller F. Vi kan forenkle uttrykket litt. Punktets potens og tangens gir oss at $|CD|^2 = |DB| \cdot |DA|$. Så $\big||CD|^2 - |BD|^2\big| = |BD| \cdot \big||DA| - |BD|\big| = |BD| \cdot |BA|$. Derfor er det nok å vise at $|BG| \cdot |BC| = |BD| \cdot |BA|$.

Vi argumenterer først ut fra situasjonen slik den er i figuren til venstre. Siden trekanten CDG er likebent, er $\angle CGD = \angle DCG$. Og fordi DC er tangent til omsirkelen til ΔABC er $\angle CAB = \angle DCB = \angle DCG$. Derfor er $\angle CGD = \angle CAD$. Det følger at firkanten $ACDG$ er syklisk, som impliserer at $|BG| \cdot |BC| = |BD| \cdot |BA|$ ved punktets potens.

Argumentet når punktene ligger som i figuren til høyre, er likt, bortsett fra at $\angle CAD = 180^\circ - \angle CAB$, og dermed $\angle CAD = 180^\circ - \angle CGD$, som er det som skal til for at firkanten $ADCG$ blir syklisk.