Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2020–2021

8. mars 2021 (nynorsk)

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (åtte punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.** Svara må skannast for å bli sende til juryen, bruk difor skrivereiskapar som gir god lesbarheit.

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Ikkje skriv namnet ditt på svararka, men skriv det i staden på eit eige ark som du legg øvst. Juryen vil ikkje få sjå dette arket.

Oppgåve 1

a. Ein $3n$-*tabell* er ein tabell med tre rader og n kolonnar som inneheld alle tala $1, 2, \ldots, 3n$. Vi kallar ein slik tabell *ryddig* dersom dei n tala i *første rad* står i stigande rekkefølgje frå venstre mot høgre, og dei tre tala i *kvar kolonne* står i stigande rekkefølgje ovanfrå og ned. Kor mange ryddige $3n$-tabellar finst det?

b. Pål har fleire høner enn han klarar å halde styr på. Difor har han eit kartotekkort for kvar av hønene sine. Han oppbevarer korta i ti boksar, som har plass til 2021 kort i kvar boks.

Diverre er Pål veldig rotete, så han kan kome til å rote bort nokre boksar. Difor lagar han fleire kopiar av kvart kort og spreier dei på forskjellige boksar, slik at sjølv om han berre kan finne sju av boksane, uansett *kva for* sju, så vil likevel desse sju boksane til saman innehalde minst eitt kort for kvar av hønene hans.

Kva er det største mogelege talet høner Pål kan halde greie på med dette systemet?

Oppgåvene held fram på neste side

Oppgåve 2

a. Vis at for alle $n \geq 3$ finst det n forskjellige positive heiltal $x_1, \ldots, x_n$ som er slik at

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

b. Dersom $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ er reelle tal slik at $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$ og $b_1^2 + \cdots + b_n^2 \leq 1$, vis at

$$\big(1 - (a_1^2 + \cdots + a_n^2)\big)\big(1 - (b_1^2 + \cdots + b_n^2)\big) \leq \big(1 - (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)\big)^2$$

Oppgåve 3

a. For kva for heiltal $0 \leq k \leq 9$ finst det positive heiltal m og n slik at talet $3^m + 3^n + k$ er eit kvadrattal?

b. Vi seier at ei mengd S av naturlege tal er *synkron* dersom siffera i a^2 er dei same (i førekomst og antal, om enn i ei anna rekkefølgje) for alle tal a i S. Til dømes er $\{13, 14, 31\}$ synkron, sidan $\{13^2, 14^2, 31^2\} = \{169, 196, 961\}$. Men $\{119, 121\}$ er ikkje synkron, for $119^2 = 14161$ og $121^2 = 14641$ har dei same siffera, men i forskjellig antal. Vis at det finst ei synkron mengd med 2021 forskjellige naturlege tal.

Oppgåve 4

a. I eit tetraeder $ABCD$ er $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 90^\circ$. Vis at arealet til sideflatene oppfyller likninga

$$\text{areal}(BAC)^2 + \text{areal}(CAD)^2 + \text{areal}(DAB)^2 = \text{areal}(BCD)^2.$$

b. Tangenten i C til den omskrivne sirkelen til trekanten ABC skjer linja gjennom A og B i eit punkt D. To ulike punkt E og F på linja gjennom B og C er slik at

$$|BE| = |BF| = \frac{\big||CD|^2 - |BD|^2\big|}{|BC|}.$$

Vis at anten $|ED| = |CD|$ eller $|FD| = |CD|$.