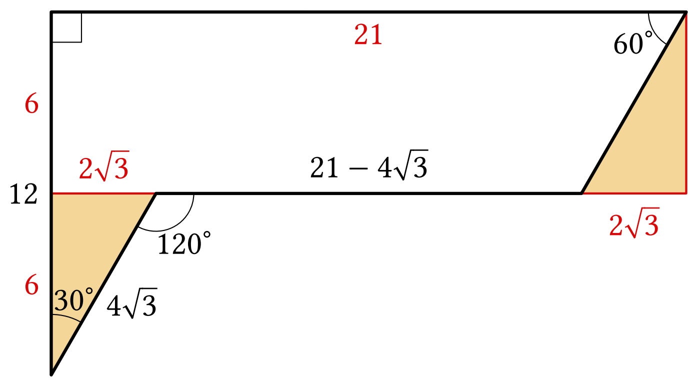
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Andre runde 2020–2021 – *Løsninger*

14. januar 2021

Oppgave 1. Rekkefølgen på de fire oppgavene kan velges på en av $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måter. Først fire muligheter for den første, tre for den andre, to for den tredje, og så er den siste bestemt. Med én av de 24 mulighetene vinner Andrea, men i hver av de 23 andre vinner Beate. Så Beate har 23 ganger større sjanse for å vinne, og må derfor spandere så mange iser på Andrea dersom Andrea vinner. **23**

Oppgave 2. Denne figuren har korrekte vinkler og mål. Fordi $120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ og vi har en rett vinkel i øvre venstre hjørne, er de to horisontale linjene parallelle. Den skyggelagte trekanten til venstre har vinkler 30°, 60° og 90°, og sidelengder $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ og 6, som vist. Den kan flyttes over til det skyggelagte området til høyre, og den resulterende figuren er et 21×6-rektangel. **126**



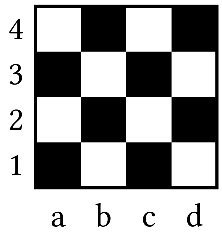
Oppgave 3. Vi skal ha $(b-a)(b+a) = 2021$. Nå er $2021 = 43 \cdot 47$ der faktorene er primtall, så enten er $b - a = 1$ og $b + a = 2021$, eller så er $b - a = 43$ og $b + a = 47$. Det passer, med $b = 45$ og $a = 2$.

Alternativt, om du ikke var kjent med primtallsfaktoriseringen av 2021, kunne du prøve å velge b med $b^2 > 2021$ og håpe at differansen blir et kvadrattall. Noen eksperimenter viser at $44^2 = 1936$ er for liten, mens $45^2 = 2025$, og $2025 - 2021 = 4$ er et kvadrattall. Bingo! **47**

Oppgave 4. Et slikt polynom har formen $P(x) = a(x+1)(x+2)(x+3) = a\big(x^3 + (1+2+3)x^2 + (1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1)x + 1\cdot 2\cdot 3\big) = a(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$, så vi må rett og slett kreve at a er et heltall og $0 < 11a < 1000$. Da må $a \leq 90$. **90**

Oppgave 5. Om kuben har sidekant $2a$ og kulen har radius $r = 2^{2/3} \cdot 3^{3/2}$, er $3a^2 = r^2 = 2^{4/3} \cdot 3^3$, altså $a = 2^{2/3} \cdot 3$.

Det innskrevne oktaederet er satt sammen av to pyramider med høyde a og en grunnflate som er et kvadratet med sidekanter $a\sqrt{2}$. Oktaederet har volum $2 \cdot \frac{1}{3}(a\sqrt{2})^2 \cdot a = \frac{4}{3}a^3 = 16 \cdot 9 = 144$. **144**



Oppgave 6. Vi kan begynne med å fargelegge diagonalen a4–b3–c2–d1. Det kan gjøres på $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ måter: Vi har tre valg for fargen på rute a4, deretter to valg for b3, så to for c2, og to for d1.

Deretter fargelegger vi a2 og b1. Vi har to valg for a2. Vi kan velge samme farge som for c2: Da har vi to valg for b1. Eller vi kan velge fargen som er forskjellig fra både b3 og c2: Da har vi bare ett valg for b1. Det gir til sammen tre mulige fargevalg for a2–b1. På samme måte har vi tre mulige valg for c4–d3. Det er tilsammen $3 \cdot 3 = 9$ mulige valg for de fire rutene a2, b1, c4, d3. Dermed kan mini-sjakkbrettet fargelegges på $24 \cdot 9 = 216$ måter. **216**

Oppgave 7. Siden $52 + 38 = 90$, kan vi skrive om ligningen slik:

$$\tan(x) = \frac{\sin(52^\circ)}{\sin(38^\circ)} = \frac{\sin(52^\circ)}{\cos(52^\circ)} = \tan(52^\circ).$$

Løsningene til ligningen er alle tall på formen $180k + 52$, der k er et heltall. Fordi $2020 = 180 \cdot 11 + 40$ og $4040 = 180 \cdot 22 + 80$, og $40 < 52 < 80$, er $2020 \leq 180k + 52 \leq 4040$ for $k = 11, 12, \ldots, 22$. I alt 12 løsninger. **12**

Oppgave 8. Et tall med primtallsfaktorisering på formen $2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdot 5^{k_5} \cdot \cdots$ har $(k_2+1)(k_3+1)(k_5+1) \cdot \cdots$ divisorer, nemlig alle tall på formen $2^{j_2} \cdot 3^{j_3} \cdot 5^{j_5} \cdot \cdots$ med $0 \leq j_p \leq k_p$ for hvert primtall p.

N har fire divisorer, så vi må enten ha $N = p^3$ der p er et primtall, eller $N = pq$ der p og q er to forskjellige primtall.

Siden $N + 1$ har et odde antall divisorer, må $N + 1$ være et kvadrattall (hver k_p må være et partall i primtallsfaktoriseringen av $N + 1$).

Skriv $N + 1 = n^2$. Så er $N = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Dersom $N = p^3$ for et primtall p, må enten $n - 1 = 1$ og $n + 1 = p^3$, dermed $p^3 = 3$, som er umulig; eller $n - 1 = p$ og $n + 1 = p^2$, dermed $p(p-1) = p^2 - p = 2$, som gir $p = 2$, $n = 3$, $N = 3^2 - 1 = 8$. Men vi kan finne større N: Den andre muligheten er nemlig $n - 1 = p$ og $n + 1 = q$, for primtall p og q. Slike primtall kalles *primtallstvillinger*. Ingen vet om det finnes uendelig mange av dem, men heldigvis slipper vi å bekymre oss om det. Vi har primtallstvillinger 29 og 31, med produkt $30^2 - 1 = 899$. Neste primtallstvillingpar etter det er 41 og 43, men $41 \cdot 43 > 1000$, så vi trenger ikke lete mer. **899**

Oppgave 9. Vi skal ha $(a + b^2) = 2^2 \cdot 505 \cdot a$, der 505 er kvadratfri (ingen kvadrattall deler 505). Derfor må a ha formen $a = 505 \cdot c^2$ for et heltall $c > 0$. Så blir $a + b = 505 \cdot 2 \cdot c$. Fordi $a + b > a$, må $2c > c^2$, så $c = 1$, og derfor $a + b = 1010$. **505**

Oppgave 10. Den gitte ulikheten kan skrives som

$$(2^{n_2} - 2) + (3^{n_3} - 3) + (4^{n_4} - 4) + \cdots + (2020^{n_{2020}} - 2020) \leq 48.$$

Fordi $8^2 - 8 > 48$, må $n_k = 1$ og $k^{n_k} - k = 0$ for alle $k > 7$.

Vi kan altså helt se bort fra $n_8, n_9, \ldots, n_{2020}$. Summen av disse tallene (2013) er gitt, så vi trenger bare telle opp antall verdier av summen $s = n_2 + \cdots + n_7$ med $(2^{n_2} - 2) + \cdots + (7^{n_7} - 7) \leq 48$.

Her er en tabell som viser $k^n - k$ for alle (k, n) med $2 \leq k \leq 7$ og $k^n - k \leq 48$:

n	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	12	20	30	42
3	6	24				
4	14					
5	30					

Vi får velge ett (svart) tall fra hver kolonne i tabellen, slik at summen av disse høyst er 48, og ser på summen s av radnumrene n. Fordi $30 + 6 + 12 + 0 + 0 + 0 = 48$ er det mulig å oppnå $s = 5 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 12$. Det er forholdsvis lett å se av tabellen at s ikke kan bli større. Minste mulige verdi er $s = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$. Man kan enkelt produsere alle summer mellom 12 og 6 ved å velge $1 \leq n_1 \leq 5$, $1 \leq n_2 \leq 2$, $1 \leq n_3 \leq 2$, og $n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 1$. Vi har funnet i alt sju mulige verdier for s. **7**