Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2020–2021 – *Løsninger*

5. november 2020

Oppgave 1. $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, og alle de andre tallene er større enn $\frac{1}{2}$. . . . . **D**

Oppgave 2. Kvadratroten av 2^x er $2^{x/2}$, og $x = 2^{100}$ gir $x/2 = 2^{99}$. . . . . . . **C**

Oppgave 3. Summen av de tre oppgitte prisene blir prisen for to epler, to bananer og to appelsiner. Så én av hver frukt koster $(11 + 13 + 12)/2 = 18$. **E**

Oppgave 4. 30 % av suvenirene er fra Argentina, og 18 % er fra Chile. Det er tilsammen 48 %. Resten må være fra Bahamas. Det blir 52 %. . . . . **D**

Oppgave 5. Vi kan fargelegge rutene med unntak av øverste høyre hjørne som vi vil. Det gir $2^8 = 256$ muligheter. Da er fargen på det siste hjørnet bestemt, så vi har ikke flere valgmuligheter. . . . . **C**

Oppgave 6. Hvis Nils har pantet x store og y små flasker, må $11x + 7y = 100$. Så $100 - 11x$ må være delelig med 7. Du kan sjekke alle verdiene $x = 0, 1, \ldots, 9$ og se at bare $x = 4$ passer. Det gir $y = (100 - 44)/7 = 8$, så $x + y = 12$.

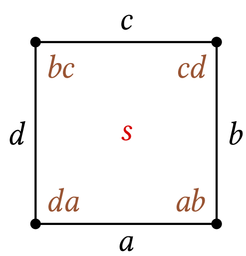
Du kan spare litt arbeid ved å legge merke til at $98 - 7x$ også er delelig med 7, slik at 7 må gå opp i $98 - 7x - (100 - 11x) = 4x - 2$. Multipliser med 2 og trekk fra $7x$, og konkluder at 7 går opp i $x - 4$, så x er 4 pluss et multiplum av 7. Siden $x < 10$ er $x = 4$ eneste mulighet.

Til sist, om du er kjent med moduloregning, får du direkte $4x \equiv 2 \bmod 7$ fra $11x + 7y = 100$, som gir $x \equiv 4 \bmod 7$, igjen med $x = 4$ som eneste løsning med $0 \le x \le 9$. . . . . **C**

Oppgave 7. Hver kvartsirkel har areal $\frac{\pi}{4}$, og den hvite trekanten i hver av dem har areal $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$. Arealet av det skyggelagte området er $2(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$. . . . . **D**

Oppgave 8. Dersom Nina skriver -1 på enten 0, 1, 3 eller 4 sider, blir tallet i midten henholdsvis 8, 2, -2 eller 0. (Det er bare ett tilfelle av hver type.) Men dersom hun skriver -1 på *to* sider, kan hun gjøre det på to måter. Om hun skriver -1 på motsatte sider, får hun -4 i midten, men om de er nabosider, er resultatet 0. Blant de seks mulighetene forekommer bare én verdi (0) to ganger, så vi står tilbake med fem mulige tall i midten.

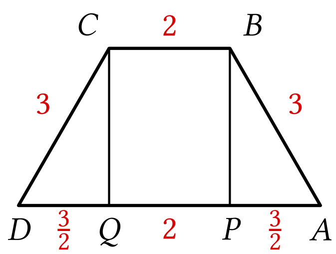
Alternativ løsning: Om tallene på sidene er a, b, c, d som i figuren, blir tallet s i midten av kvadratet $s = (a+c) + (b+d) + (a+c)(b+d) = x + y + xy = (1+x)(1+y) - 1$, der $x = a + c$ og $y = b + d$. Men $1 + x$ og $1 + y$ kan velges uavhengig av hverandre, med mulige verdier -1, 1 og 3. Produktet av to av disse må bli en av -3, -1, 1, 3 eller 9, så s må være en av -4, -2, 0, 2 eller 8. . . . . **A**



Oppgave 9. Trekanten AMN er likeformet med ABC, med lengdeforhold $\frac{1}{2}$. Foholdet mellom arealene er $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, og arealet av firkanten $BCNM$ blir $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ganger arealet av ABC. . . . . **D**

Oppgave 10. Dersom n ender på 101 i totallsystemet, så vil $n - 5$ ende på 000 i totallsystemet, fordi 5 skrives 101 i totallsystemet. Det vil si at $n - 5$ er delelig med 8. Men $615 - 5 = 610$ er ikke delelig med 8, mens 0, 328, 544 og 2016 alle er det. . . . . **D**

Oppgave 11. Sidene BC og AD er parallelle. (En av mange måter å vise det på, er å merke seg at trekantene BCD og CBA er kongruente, fordi begge har sider med lengde 2 og 3 med samme vinkel mellom. Men så har de to trekantene samme høyde regnet fra siden BC.) Trekk normaler fra B og C på AD, med fotpunkt P og Q. Så er $\angle ABP = \angle DCQ = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. De to trekantene BAP og CDQ har hjørnevinkler 30°, 60° og 90°, så de korte katetene AP og DQ er halvparten så lange som hypotenusen, altså $\frac{3}{2}$. Videre er $|PQ| = |BC| = 2$, siden de to er motsatte sider i et rektangel. Alt i alt blir $|AD| = \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 5$. . . . . **A**



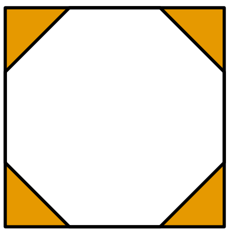
Oppgave 12. Forskjellen mellom vanlig tid og Karl Erik-tid øker med åtte timer hver time, så det tar en og en halv time for forskjellen å øke med tolv timer. Det går altså en og en halv time mellom hver gang klokken viser rett tid. I løpet av et døgn skjer det $24/\frac{3}{2} = 16$ ganger. (Hvis klokken viste rett tid i det døgnet starter, vil den også vise rett i det døgnet tar slutt. Da kunne det argumenteres for at svaret blir 17, men det blir litt feil, likevel. For sikkerhets skyld har vi ikke regnet 17 blant svaralternativene.) . . . . **D**

Oppgave 13. Det finnes i alt $\binom{40}{6} = \frac{40!}{6!\,34!}$ utvalg på seks kort blant de 40. Av disse omfatter $40 - 5 = 35$ utvalg alle de gylne kortene, så svaret blir $35/\frac{40!}{6!\,34!} = \frac{6!\,35!}{40!}$. . . . . **D**

Oppgave 14. Fordi $1001 = 91 \cdot 11$, er alle tall på den gitte formen delelig på 11. Vi må ha $a \neq 0$ (ellers er ikke tallet sekssifret). Så a kan velges på en av ni måter, deretter kan b også velges på en av ni måter, og c kan velges på en av åtte måter. I alt har vi $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ muligheter. . . . . **D**

Oppgave 15. Uttrykkene A, B og C forenkles alle til D, mens $\text{E} = 10 + \frac{11}{2}\sqrt{2}$ (etter at teller og nevner multipliseres med $2 - \sqrt{2}$). . . . . **E**

Oppgave 16. Formelen ($V = \frac{1}{3}Gh$) for volumet av en kjegle gir at denne kjeglen har volum lik arealet av åttekanten som er grunnflate i kjeglen. Skriv åttekanten inn i et kvadrat som vist i figuren. Hver av de skyggelagte trekantene er rettvinklet og likebent, med hypotenus av lengde 1, så katetene har lengde $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dermed har kvadratet areal $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$. Hver av de fire trekantene har areal $\frac{1}{4}$, til sammen 1 for alle fire (du kan også sette dem sammen til et kvadrat med sidekant 1). Åttekanten har således areal $3 + 2\sqrt{2} - 1 = 2 + 2\sqrt{2}$. . . . . **A**

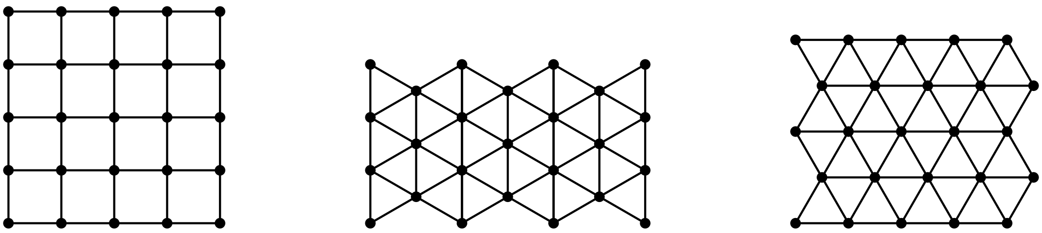


Oppgave 17. Herman kan sette sammen $3^3 = 27$ menyer helt uten sviske. Med sviske inkludert kan han velge tidspunkt for grøt med sviske på tre måter. For hver av disse har han så 3^2 muligheter for de to andre rettene, altså $3 \cdot 3^2 = 27$ muligheter også her. Tilsammen har han $27 + 27 = 54$ menyer å velge mellom. . . . . **D**

Oppgave 18. Vi faktoriserer: $2020 = 2^2 \cdot 505$. Divisorene har form $2^a \cdot k$ med $a \in \{0, 1, 2\}$ og k en (nødvendigvis odde) divisor til 505. En slik divisor er odde bare når $a = 0$, og det skjer i $\frac{1}{3}$ av tilfellene. . . . . **B**

Oppgave 19. Vi kan velge ut tre av tallene 1, 2, …, 2022 på $\binom{2022}{3}$ måter. Men vi kan også telle opp mulighetene slik: Om det midterste av tallene er k, kan vi velge det minste på $k-1$ måter, og det største på $2022-k$ måter. Det gir $(k-1)(2022-k)$ muligheter for hver k. Summen i oppgaven er summen av disse tallene for $k = 2, 3, \ldots, 2021$. ($k = 1$ og $k = 2022$ gir ingen muligheter.) A

Oppgave 20. Figurene under viser, fra venstre mot høyre, hvordan vi kan få plass til 25 Matteland-innbyggere i hvert av rommene C, D eller E. Hver av de korte linjestykkene i figurene har lengde 1 m. Høyden i hver småtrekant er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, så figuren i midten er akkurat $3\sqrt{3} \times 3$ meter, mens figuren til høyre er $\frac{9}{2} \times 2\sqrt{3}$ meter, som er mindre i begge retninger enn $\frac{1}{2}\pi^2 \times 2\sqrt{\pi}$. Rom A er større enn rom C i begge retninger, så der er det godt med plass.



Hvis vi trekker en sirkel om hver innbygger med radius $\frac{1}{2}$ m, skal sirklene ikke overlappe. De kan stikke inntil en halvmeter utenfor rommet, så om alle fikk plass i rom B, måtte $25 \cdot \pi(\frac{1}{2})^2 < (\frac{5}{2}\sqrt{\pi})^2$ (ekte ulikhet fordi sirklene ikke fyller ut all plassen), så det går ikke. Rom B er det eneste, og derfor det største, av de som ikke har plass. . . . . B