Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2017–2018 – *Løsninger*

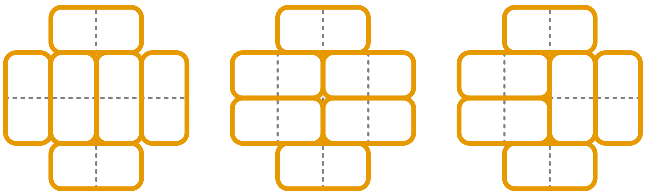
9. november 2017

Oppgave 1. Alle odde multipler av 5 har 5 som siste siffer. . . . . **C**

Oppgave 2. Ved ankomsten i Trondheim er klokken i San Fransisco 2 om morgenen. Magnus reiste derfra 21 timer tidligere, som var 5 om morgenen dagen før. . . . . **C**

Oppgave 3. Syklisten kjørte først 24 km rett fram, og deretter $1800 \cdot 10\,\text{m} = 18\,\text{km}$ i rett vinkel på den første strekningen. Pytagoras viser at avstanden mellom start og ankomst er $\sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{900}\,\text{km}$ . . . . **C**

Oppgave 4. Konfigurasjonen til venstre i figuren kan roteres 90°, og det samme gjelder den i midten. Den til høyre kan roteres 90°, 180° eller 270°.

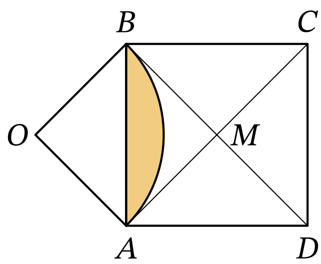


Dette er alle mulige måter å dekke figuren på med dominobrikker, og i alt har vi da funnet $2 + 2 + 4 = 8$ konfigurasjoner. . . . . **D**

Oppgave 5. Legger vi sammen de fem likningene, får vi $2(a+b+c+d+e) = 20$, som gir $a + b + c + d + e = 10$. . . . . **A**

Oppgave 6. Om vi øker hvert av tallene a, b, c, d, e med 1, vil alle ligningene fortsatt holde, men summen øker med 5. . . . . **E**

Oppgave 7. Kall sentrum i sirkelen O, og la M være skjæringspunktet mellom diagonalene AC og BD. Siden sirkelen tangerer diagonalene, er $\angle OAM = \angle OBM = 90°$. Også $\angle AMB$ er rett, så firkanten $AMBO$ er et kvadrat med sidelengde $\sqrt{2}$. Sirkelsektoren får areal $\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \pi/2$, og for å finne arealet av det skyggelagte området, trekker vi fra arealet av trekanten OAB, som er 1. . . . . **A**



Oppgave 8. Fordi $(2n)^4 = 16n^4$ og 16 ikke går opp i 2018, kan ikke a og b begge være partall. Men da må begge være oddetall, fordi 2018 er et partall. Vi regner ut at $1^4 = 1$, $3^4 = 81$, $5^4 = 625$ og $7^4 > 2018$. Så a og b må velges blant tallene 1, 3 og 5, men da kan vi åpenbart ikke få til summen 2018. . . . . **A**

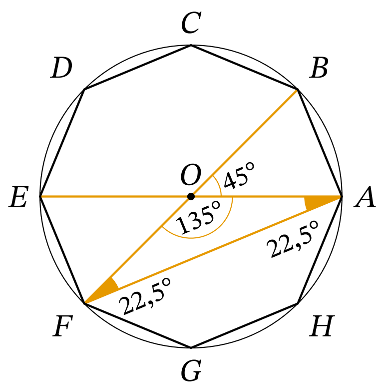
Oppgave 9. Gustav har nå 13 bøker, og den innbyrdes rekkefølgen av de ti grå bøkene er kjent. Eneste valgmulighet er hvilke av de 13 plassene som skal fylles av de tre nye bøkene. Det er 13 mulige plasser for den røde, deretter 12 mulige plasser for den gule, og til sist 11 mulige plasser for den grønne boken. I alt $13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$ muligheter.

Alternativt velger Gustav først hvilke tre plasser de nye bøkene skal plasseres i, på en av $\binom{13}{3}$ måter, og så velger han rekkefølgen på de tre nye bøkene på en av 3! måter. I alt $3! \cdot \binom{13}{3}$ muligheter. .... **D**

Oppgave 10. Det finnes i hvert fall en slik trekant: Legger vi det tredje hjørnet i $(10, 0)$, får vi en trekant med grunnlinje 10 og høyde 13, og derfor areal $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65$. Men hver gang vi har en slik trekant, med det tredje hjørnet i (a, b), kan vi danne en ny trekant ved å forskyve dette hjørnet parallelt med den motstående siden til $(a + 5, b + 13)$. Den får da samme areal som den opprinnelige. Det kan gjentas så ofte man vil, så det finnes uendelig mange slike trekanter. .... **E**

Oppgave 11. For hvert heltall $n > 1$ er $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$. Derfor er 1 det *minste* av tallene, så det ser vi bort fra. Vi finner $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{6}$ og $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, så $\sqrt[3]{3}$ er størst. .... **C**

Oppgave 12. Alle åttekantens hjørner ligger på en felles sirkel, med vinkelavstand $\frac{1}{8} \cdot 360° = 45°$ mellom hjørnene. Spesielt er $\angle AOB = 45°$, så for nabovinkelen blir $\angle AOF = 180° - 45° = 135°$. Fordi trekanten AOF er likebent, er $\angle OAF$ og $\angle OFA$ like store, og siden vinkelsummen i trekanten er 180°, må hver av de to vinklene være 22,5° stor. (Det finnes mange andre veier til målet, for eksempel ved å utnytte at firkanten $ABEF$ er et rektangel av symmetrigrunner, og at trekanten AOB er likebent.)



Alternativt kan vi benytte at vinkelen AFB er en periferivinkel tilsvarende sentralvinkelen AOB, og derfor halvparten så stor. .... **B**

Oppgave 13. En slik følge er gitt ved et utvalg på ti tall av de tolv tallene 1, 2, ..., 12, og antall slike utvalg er $\binom{12}{10} = 12 \cdot 11/2! = 66$. .... **C**

Oppgave 14. Primtallsfaktoriseringen av $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ er $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, og n går opp i dette presis dersom $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ med $0 \le a \le 4$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 1$ og $0 \le d \le 1$. Det gir i alt $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$ muligheter. . . . . **E**

Oppgave 15. For enkelhets skyld kan vi bruke én runde på banen som lengdeenhet, og den tiden Mona bruker på denne runden som tidsenhet. Da endres avstanden mellom Mona og fluen med fart 4 når fluen flyr i motsatt retning, og 2 når den flyr i samme retning som Mona løper. I det første tilfellet bruker den dermed tiden $1/4$ fra den forlater Mona til den treffer henne igjen, og i det andre tilfellet bruker den tiden $1/2$. Tilsammen bruker den da tid $3/4$ før den treffer Mona to ganger. Den tiende gangen har den brukt tid $5 \cdot 3/4 = 15/4$, og det er også det antall runder Mona har løpt. . . . . **E**

Oppgave 16. Det første tallet $\binom{10}{5}$ er størst. Årsaken er at dette tallet er antall måter å velge fem ut av ti objekter på. Alle de andre tallene teller også antall måter å velge fem av ti på, men med en eller annen begrensning: For eksempel er $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3}$ antall utvalg der to av de tre første objektene velges, mens tre av de gjenværende sju velges – altså fem av ti, men med tilleggskrav. . . . . **A**

Oppgave 17. Dersom ett av tallene på tavlen er $a = 10m + k$ med $0 \le k \le 9$, så blir det neste tallet $b = m + 10$. Dersom $m > 40$, det vil si $a \ge 410$, blir $8b = 8m + 80 < 10m \le a$. Det følger at hvis de første 670 tallene i rekken er ≥ 410, så er det 671. tallet mindre enn $2^{2017}/8^{670} = 2^{2017-3\cdot 670} = 2^7 = 128 < 410$. Etter et tall < 410 kommer et tall < 51, og deretter et tall < 16, og etter det kommer tallet 11 (for det er klart at alle tallene på tavlen er større enn 10).

Eksakt regning viser at tallrekken inneholder 608 tall større enn 11. Den ender slik: 15048789, 1504888, 150498, 15059, 1515, 161, 26, 12, 11, 11, 11, ... **C**

Oppgave 18. Et terningkast av den gitte typen kan spesifiseres slik: Først velges hvilket antall øyne som skal forekomme to ganger. Det kan gjøres på 6 måter. Plassér terningene i rekkefølge etter hvor mange øyne som vises: For eksempel 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6. Så tilordnes de sju fargene til disse terningene. Det kan gjøres på 7! måter. Men fordi to terninger viser samme antall øyne, har vi nå telt dobbelt, så vi ender med $6 \cdot 7!/2 = 3 \cdot 7!$ muligheter.

Alternativt kan vi først velge ut hvilke to av terningene som skal ha samme farge. Det kan gjøres på $\binom{7}{2} = 21$ måter. Så kan vi legge til side den ene av de to, og farge de gjenværende terningene på en av 6! måter. I alt får vi $21 \cdot 6! = 3 \cdot 7!$ muligheter. . . . . **D**

Oppgave 19. Spørsmålet er hvor mange positive heltall som ikke kan skrives på formen $5a + 7b$, med heltall $a \geq 0$ og $b \geq 0$. Men la oss spørre hvilke heltall n som *kan* skrives som $5a + 7b$: Her er en tabell som viser noen tall på denne formen:

b	$5a + 7b$ for $a = 0, 1, 2, \ldots$
0	0, 5, 10, 15, 20, 25, ...
1	7, 12, 17, 22, 27, ...
2	14, 19, 24, ...
3	21, 26, ...
4	28, ...

Fra de fem tallene 24–28 kan vi få til alle større tall ved å legge til multipler av 5. De tallene vi *ikke* kan få til er da de tallene mellom 1 og 23 som mangler i tabellen, nemlig de tolv tallene 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18 og 23. . . . . **D**

Oppgave 20. Det finnes $\binom{16}{3} = 560$ tripler av distinkte punkter blant de 16 gitte punktene, men vi kan bare danne 499 trekanter, så punktene i 61 av disse triplene må ligge på linje. Vi vet at enhver linje som inneholder minst tre av de 16 punktene må inneholde minst fire av dem. En slik linje med p punkter vil «bruke opp» $\binom{p}{3}$ av de 61 triplene nevnt foran. Nå kan vi tegne opp den relevante delen av Pascals trekant. Nedenfor er $\binom{p}{3}$ fargelagt, for $p = 4, 5, 6, 7, 8$. For $p > 8$ blir binomialkoeffisienten større enn 61, så det kan ikke finnes linjer med så mange punkter.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Dersom det finnes n_p linjer med eksakt p punkter, må $4n_4 + 10n_5 + 20n_6 + 35n_7 + 56n_8 = 61$. Vi ser med en gang at $n_8 = 0$. Videre må n_7 være odde og $n_7 < 2$, så $n_7 = 1$, og derfor $4n_4 + 10n_5 + 20n_6 = 26$. $n_6 = 1$ gir ingen løsning, så $n_6 = 0$. Dermed kan vi prøve oss frem og finne at $n_5 = 1$ og $n_4 = 4$ er eneste mulighet. . . . . **D**